

**Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
Departamento de  
Engenharia Mecânica**



*10,0 (dez)  
C.A. Martins*

**Mudança da Frequência Natural  
de Rotores Hidráulicos para  
Evitar a Ressonância**

**Marcelo Vinicius Magnoli**



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
Departamento de  
Engenharia Mecânica

# Mudança da Frequência Natural de Rotores Hidráulicos para Evitar a Ressonância

Projeto Mecânico I & II  
PMC – 580 & 581

Aluno:	Marcelo Vinicius Magnoli	n.º USP 2369311
Orientador:	Clóvis de Arruda Martins	
Coordenador:	Edson Gomes	
Data:	17 / 12 / 2001	

# Índice

Índice de figuras .....	iii
Lista de símbolos e abreviaturas .....	v
1. Resumo .....	1
2. Introdução .....	2
3. Metodologia de projeto .....	4
4. Exemplo típico .....	8
5. Fundamentação teórica.....	10
5.1. Sistema massa-mola de 1 grau de liberdade .....	10
5.2. Sistema massa-mola com "n" graus de liberdade.....	11
5.3. Frequência natural .....	13
5.4. Frequências naturais e modos de vibrar.....	13
5.5. Sistema com massa distribuída.....	15
5.6. Amortecimento e frequência amortecida .....	16
5.7. Excitação externa.....	18
5.8. Ressonância .....	21
6. Modelagem.....	23
6.1. Distribuição de massa .....	23
6.2. Amortecimento e massa adicional.....	23
6.3. Condições de contorno .....	24
7. Método de simulação .....	27
7.1. Método de solução e discretização .....	27
7.2. Método de cálculo .....	28
7.3. Análise de sensibilidade do erro da simulação.....	29
8. Simulação e análise do exemplo.....	31

8.1. Características do rotor .....	31
8.2. Cálculo das frequências naturais e de excitação .....	31
8.3. Cálculo das tensões dinâmicas .....	34
8.4. Cálculo das tensões estáticas .....	36
8.5. Falha por fadiga .....	37
<b>9. Metodologia de solução .....</b>	<b>38</b>
9.1. Estratégia de solução .....	38
9.2. Considerações sobre massa, rigidez, modos e frequências naturais ....	38
9.3. Modos de vibrar de um rotor .....	41
9.4. Considerações sobre os modos de vibrar de um rotor .....	45
<b>10. Formulação da solução .....</b>	<b>47</b>
10.1. Alternativas de solução .....	47
10.2. Critérios de escolha .....	47
10.3. Escolha da alternativa .....	48
<b>11. Simulação da solução .....</b>	<b>51</b>
11.1. Modelo modificado .....	51
11.2. Resultados da simulação .....	53
11.3. Análise dos resultados .....	59
11.4. Considerações sobre os resultados .....	61
<b>12. Generalização .....</b>	<b>63</b>
12.1. Características do rotor e modelo .....	63
12.2. Comparação da geometria original .....	64
12.3. Modelo modificado e resultados .....	70
12.4. Análise e comparação .....	72
<b>13. Conclusão .....</b>	<b>75</b>
<b>14. Bibliografia .....</b>	<b>77</b>

# Índice de figuras

Figura 2.1: Rotor Francis. ....	3
Figura 3.1: Anteprojeto: corte da turbina. ....	4
Figura 3.2: Cálculo de escoamento: malha para simulação numérica. ....	5
Figura 3.3: Desenho de um rotor Francis e passagem d'água. ....	6
Figura 3.4: Resultados da simulação numérica e do ensaio de modelo. ....	7
Figura 4.1: Trincas surgidas no rotor devido à operação em ressonância. ....	8
Figura 5.1: Sistema massa-mola de 1 grau de liberdade. ....	10
Figura 5.2: Solução de um sistema massa-mola de um grau de liberdade. ....	11
Figura 5.3: Sistemas com mais de um grau de liberdade. ....	12
Figura 5.4: Exemplo de modos de vibrar. ....	15
Figura 5.5: Sistema massa-mola-amortecedor. ....	16
Figura 5.6: Solução de um sistema massa-mola-amortecedor. ....	18
Figura 5.7: Sistema massa-mola-amortecedor forçado. ....	19
Figura 5.8: Solução de um sistema forçado massa-mola-amortecedor. ....	21
Figura 5.9: Ressonância. ....	22
Figura 6.1: Vórtice induzido pelo escoamento. ....	26
Figura 7.1: Malha de elementos finitos do rotor. ....	28
Figura 8.1: Deflexões normalizadas relativas ao terceiro modo de vibrar. ....	33
Figura 8.2: Tensões normalizadas relativas ao terceiro modo de vibrar. ....	34
Figura 8.3: Tensões estáticas no rotor. ....	36
Figura 9.1: Primeiro modo de vibrar (rotor 1). ....	41
Figura 9.2: Segundo modo de vibrar (rotor 1). ....	42
Figura 9.3: Terceiro modo de vibrar (rotor 1). ....	43
Figura 9.4: Quarto modo de vibrar (rotor 1). ....	44
Figura 9.5: Quinto modo de vibrar (rotor 1). ....	45
Figura 10.1: Alternativas de solução. ....	47
Figura 11.1: Rotor 1 modificado. ....	52
Figura 11.2: Malha de elementos finitos do rotor 1 modificado. ....	53
Figura 11.3: Primeiro modo de vibrar modificado (rotor 1). ....	54
Figura 11.4: Segundo modo de vibrar modificado (rotor 1). ....	55

<b>Figura 11.5:</b> Terceiro modo de vibrar modificado (rotor 1).	56
<b>Figura 11.6:</b> Quarto modo de vibrar modificado (rotor 1).	57
<b>Figura 11.7:</b> Quinto modo de vibrar modificado (rotor 1).	58
<b>Figura 11.8:</b> Alteração das frequências naturais (rotor 1).	60
<b>Figura 11.9:</b> Diferença entre as frequências naturais (rotor 1).	60
<b>Figura 11.10:</b> Razão entre as frequências naturais (rotor 1).	61
<b>Figura 12.1:</b> Malha de elementos finitos do rotor 2.	64
<b>Figura 12.2:</b> Primeiro modo de vibrar (rotor 2).	65
<b>Figura 12.3:</b> Segundo modo de vibrar (rotor 2).	66
<b>Figura 12.4:</b> Terceiro modo de vibrar (rotor 2).	67
<b>Figura 12.5:</b> Quarto modo de vibrar (rotor 2).	68
<b>Figura 12.6:</b> Quinto modo de vibrar (rotor 2).	69
<b>Figura 12.7:</b> Malha de elementos finitos do rotor 2 modificado.	71
<b>Figura 12.8:</b> Alteração das frequências naturais (rotor 2).	72
<b>Figura 12.9:</b> Diferença entre as frequências naturais (rotor 2).	73
<b>Figura 12.10:</b> Razão entre as frequências naturais (rotor 2).	73

## Lista de símbolos e abreviaturas

<b>A</b>	=	Amplitude	(m)
<b>B</b>	=	Amplitude	(m)
<b>c</b>	=	Constante de amortecimento	(N/ms <sup>-1</sup> )
<b>C<sub>R</sub></b>	=	Constante de Rheinghans	
<b>F</b>	=	Força	(N)
<b>F<sub>0</sub></b>	=	Amplitude da força	(N)
<b>f</b>	=	Frequência	(Hz)
<b>f<sub>n</sub></b>	=	Frequência natural	(Hz)
<b>f<sub>R</sub></b>	=	Frequência da rede	(Hz)
<b>φ</b>	=	Fase	(rad)
<b>I</b>	=	Matriz identidade	
<b>k</b>	=	Rigidez	(N/m)
<b>K</b>	=	Matriz de rigidez	(N/m)
<b>L</b>	=	Auto-vetor	(m)
<b>λ</b>	=	Auto-valor	(rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
<b>m</b>	=	Massa	(Kg)
<b>M</b>	=	Matriz de massa	(Kg)
<b>MEF</b>	=	Método dos elementos finitos	
<b>n</b>	=	Rotação nominal	(rpm)
<b>n<sub>d</sub></b>	=	Rotação de disparo	(rpm)
<b>PCH</b>	=	Pequena central hidrelétrica	
<b>r</b>	=	Razão entre frequências	
<b>UHE</b>	=	Usina hidrelétrica	
<b>ω</b>	=	Frequência angular	(rad/s)
<b>ω<sub>d</sub></b>	=	Frequência angular amortecida	(rad/s)
<b>ω<sub>f</sub></b>	=	Frequência angular de excitação	(rad/s)
<b>ω<sub>n</sub></b>	=	Frequência natural angular	(rad/s)
<b>x</b>	=	Deslocamento	(m)
<b>x</b>	=	Vetor de deslocamento	(m)

$x_h$	=	Solução homogênea	(m)
$x_p$	=	Solução particular	(m)
$\psi$	=	Atraso de fase	(rad)
$Z_G$	=	Número de palhetas diretrizes	
$Z_R$	=	Número de pás	
$\zeta$	=	Fator de amortecimento	



## 1. Resumo

Rotores hidráulicos do tipo Francis apresentam problemas de resistência e falham prematuramente quando suas frequências naturais se aproximam daquelas existentes na máquina.

Atualmente, não se dispõe de nenhum método analítico ou empírico para solucionar esse problema. Então, procura-se nesse trabalho determinar uma regra ou recomendação para resolver esse problema, através de análises de elementos finitos, variando a geometria de rotores reais existentes.

## 2. Introdução

A produção de energia por meio de hidrelétricas está presente em todo o mundo. Sua importância varia de país para país, conforme o potencial hidráulico e a política de desenvolvimento energético. Como desvantagens podem ser citadas a necessidade de alagar áreas de milhares de quilômetros quadrados, modificação das estruturas ecológicas e econômico-sociais da região, a distância entre os centros produtores e consumidores e o capital exigido para a construção. Contudo, suas vantagens são indiscutíveis: uso de energia renovável e limpa, produção em grande escala, chegando a 20.000 MW no maior complexo do mundo em Três Gargantas na China, e rendimento superior a 92%.

No Brasil as hidrelétricas fornecem 95% de toda a energia consumida. A usina de Itaipu é composta por 20 turbinas, sendo que uma única turbina é capaz de gerar 750 MW. As previsões são de que durante os próximos 20 anos ainda haja potencial hidráulico no mundo para a construção de grandes aproveitamentos hidrelétricos, após esse período restarão as Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCH) e a repotenciação dos complexos já existentes.

Esse quadro mostra a importância desse setor da economia e a necessidade de continuar a desenvolver esse tipo de tecnologia, no sentido de aperfeiçoá-la e eliminar problemas que ainda persistam. Em relação a isso, rotores hidráulicos do tipo Francis (figura 2.1) são, via de regra, utilizados em aproveitamentos hidrelétricos de grande porte, com queda d'água significativa e grande vazão, como por exemplo em Três Gargantas, Itaipu, Paulo Afonso, Furnas, Victoria Falls, entre outros. Dada a importância desse modelo de rotor hidráulico, as grandes companhias, como Voith Siemens, General Electric, ABB Alstom, Vatech e Hitachi, buscam incessantemente o seu aprimoramento.

Como tantas outras máquinas, os rotores Francis estão sujeitos a vibrações e pode haver ressonância. Caso isso ocorra, pode haver danos causados ao rotor, devido à intensificação da ocorrência de fadiga e sobretensão mecânica, por exemplo aparecimento de trincas e escoamento do material, encurtando a vida útil da máquina e levando-a à falha.

Para resolver esse problema, é necessário afastar as frequências naturais do rotor das frequências de excitação presentes na máquina. Logicamente, há apenas duas alternativas possíveis, que são modificar as excitações externas ou as frequências naturais da turbina. A primeira solução, não se mostra tão atraente, pois as excitações vêm de diversas fontes na máquina e tentar alterá-las pode eventualmente acarretar demasiadas mudanças de projeto.

Por outro lado, a segunda, só envolve a modificação das características do rotor. No entanto, há limitações quanto à escolha do material e ao perfil hidráulico do rotor, restringindo as alterações a mudanças de geometria que não perturbem o escoamento. São poucos os avanços tecnológicos nessa área e, por isso, no decorrer desse estudo, busca-se encontrar uma regra ou método para a alteração da geometria, de forma a conseguir deslocar as frequências naturais dos rotores Francis da forma desejada.

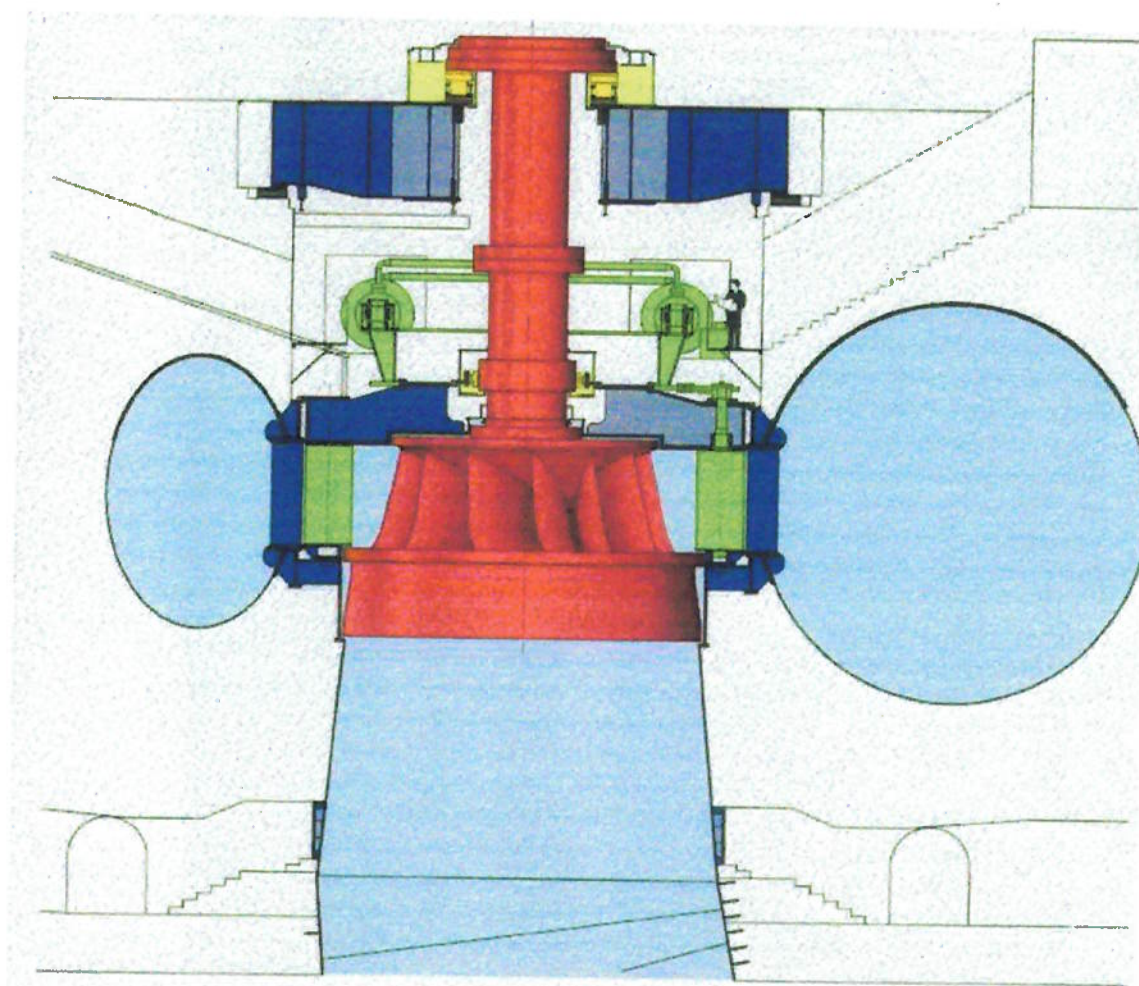


**Figura 2.1:** Rotor Francis.

### 3. Metodologia de projeto

O projeto da usina (figura 3.1) inicia-se quando o cliente solicita uma cotação e informa quais as características básicas do empreendimento, que são a localidade, os pontos operacionais desejados e o tempo de operação estimado em cada um deles. Os pontos operacionais são determinados pela vazão e altura de queda, que dependem do regime fluvial da região e da demanda de energia elétrica.

O cliente deseja que a instalação seja capaz de gerar o máximo de energia possível em cada ponto operacional previsto. Para atingir esse objetivo, é executado o anteprojeto da usina visando a maximizar o rendimento da máquina para esses pontos.



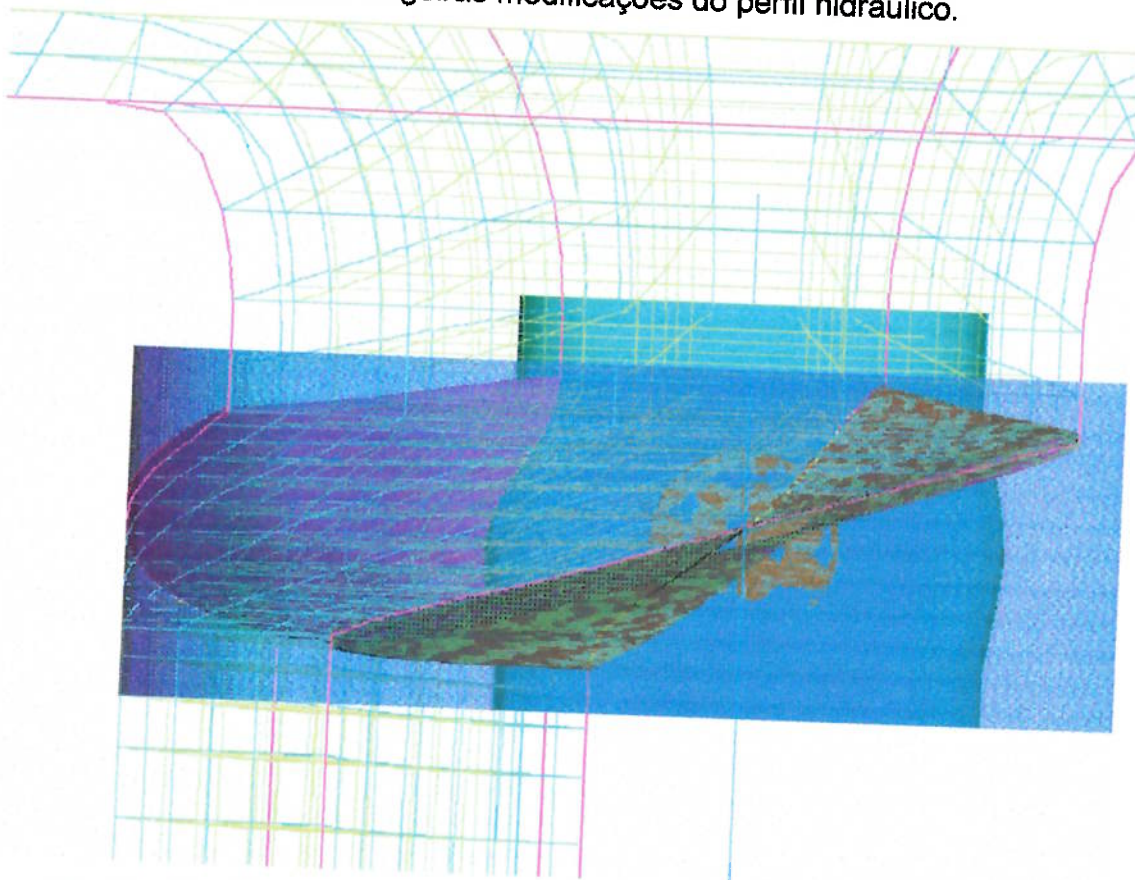
**Figura 3.1:** Anteprojeto: corte da turbina.



Caso seja efetuada a venda do projeto, passa-se à fase do projeto hidráulico ótimo, na qual chega-se ao perfil hidráulico do rotor. Há três etapas envolvidas nesse processo.

Inicialmente, procede-se à otimização numérica, quando são criados modelos matemáticos para simular o escoamento potencial, como por exemplo a malha de volumes finitos da figura 3.2. Em seguida, com base nos resultados dessas simulações e em dados experimentais acumulados ao longo dos anos, já é possível ter-se o desenho do perfil hidráulico do rotor, como mostrado na figura 3.3. Depois disso, uma vez definido o desenho da turbina, é feito o ensaio de modelo reduzido.

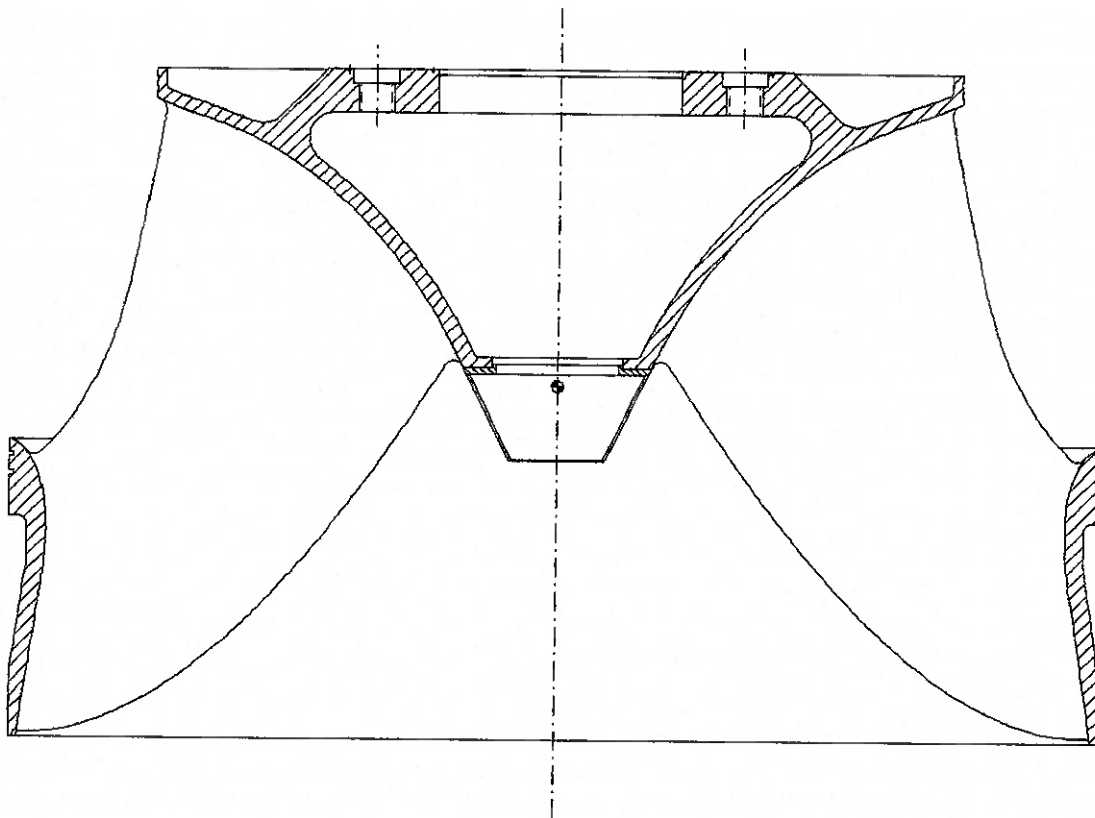
Um modelo físico, geometricamente similar e menor em relação ao protótipo é confeccionado, para que seja testado em laboratório. Nesse teste são medidas vazões, pressões e rendimento do modelo em condições similares aos pontos de operação do protótipo. Os resultados desse ensaio (figura 3.4) podem levar a ligeiras modificações do perfil hidráulico.



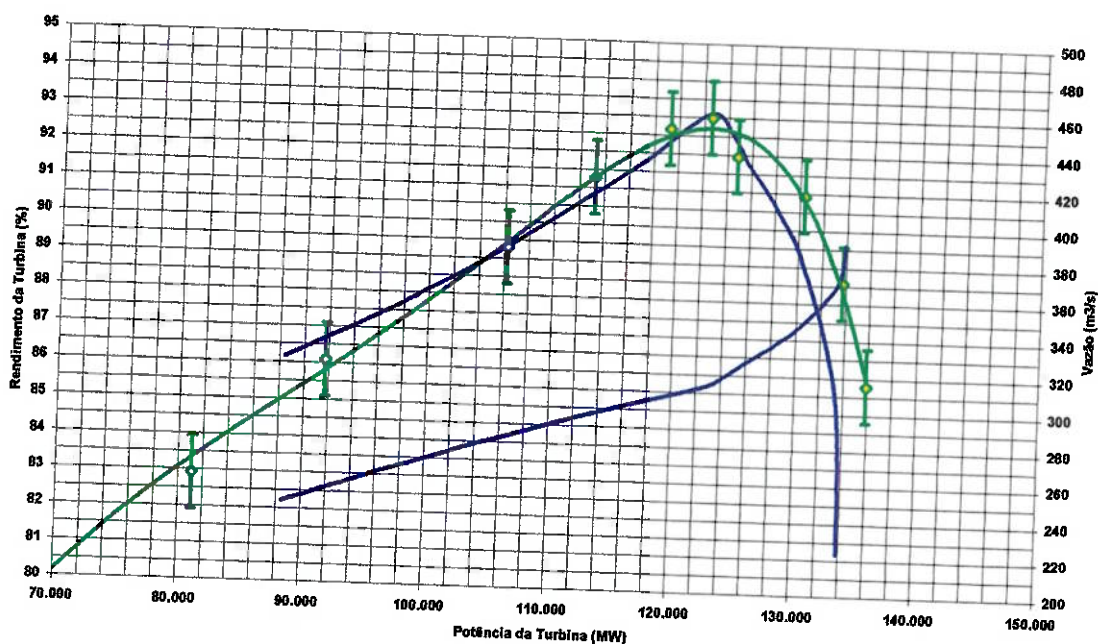
**Figura 3.2:** Cálculo de escoamento: malha para simulação numérica.

É apenas depois de definido e concluído o projeto hidráulico que são verificados os aspectos estruturais estáticos e dinâmicos do rotor. Basicamente essa análise traduz-se em um estudo de resistência, onde são calculadas as tensões, e outro vibracional, que fornece as frequências naturais e modos de vibrar. Ambas as análises são feitas com o auxílio de simulações com elementos finitos.

Caso no decorrer da análise estrutural surja a possibilidade de ocorrência de problemas de resistência ou vibração, fica-se restrito a poucas alterações geométricas possíveis, pois o projeto já se encontra em uma fase bastante avançada e não se pode mais modificar as principais características geométricas da passagem d'água (figura 3.3), que já foram estabelecidas no projeto hidráulico.



**Figura 3.3:** Desenho de um rotor Francis e passagem d'água.



**Figura 3.4:** Resultados da simulação numérica e do ensaio de modelo.

No caso de detecção de problemas em potencial de resistência, eles podem ser contornados empregando-se certas tecnologias patenteadas pelos fabricantes de turbinas. No entanto, caso haja possíveis problemas de vibração relacionados à operação em ressonância, ainda não se conhece nenhum método capaz de evitá-la de maneira eficiente e sem comprometer a performance da máquina.

O objetivo desse estudo surge da necessidade de se encontrar uma forma para resolver esse problema, alterando as frequências naturais do rotor pela modificação da sua geometria nas regiões onde isso é permitido.

## 4. Exemplo típico

Um caso real de rotor que entrou em operação e que falhou devido a fenômenos de natureza vibracional ilustra bem o problema.

O rotor em questão foi projetado para uma vida útil superior a 50 anos, mas operou durante aproximadamente 10.000 horas, até a falha, em uma condição operacional desfavorável, que causou o aparecimento de uma força de excitação com frequência de 16,9 Hz. Por outro lado, uma das frequências naturais amortecidas do rotor era de 17,2 Hz.

Essa sintonia entre as frequências caracteriza o fenômeno de ressonância, que produz um aumento significativo da amplitude do movimento vibracional, levando maiores solicitações mecânicas a atuarem sobre o rotor, fazendo com que as tensões mecânicas ultrapassem os valores de projeto.

Esse efeito acelerou o fenômeno de fadiga nesse rotor e o resultado foi a sua falha prematura, devido ao aparecimento das trincas vistas na figura 4.1, que chegam a atingir até 1000 mm.



**Figura 4.1:** Trincas surgidas no rotor devido à operação em ressonância.

Em relação a esse rotor, o procedimento de reparo escolhido foi o de remover material na região das trincas e substituí-lo por outro de granulação mais fina que é mais resistente à fadiga. Percebe-se que esta é uma solução

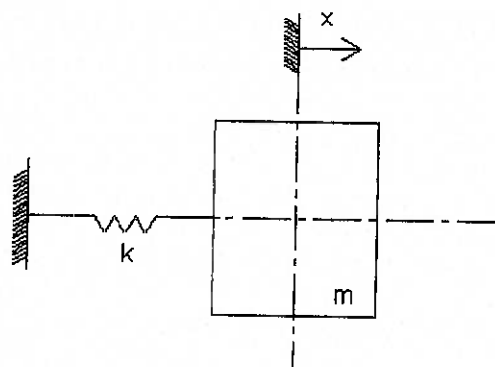


que não atua sobre as causas do problema e que é simplesmente paliativa, pois o rotor continua a operar em ressonância. Daí, mais uma vez, a necessidade de desenvolver uma tecnologia que permita alterar as frequências naturais do rotor.

## 5. Fundamentação teórica

### 5.1. Sistema massa-mola de 1 grau de liberdade

Todo sistema mecânico apresenta inércia e rigidez finitas e isso o permite acumular energia na forma de energia cinética e potencial. A rigidez faz com que o corpo apresente um comportamento elástico, fazendo com que haja transferência do acúmulo de energia entre a cinética e a potencial. Assim, observam-se oscilações do sistema em torno da configuração de equilíbrio. Uma representação esquemática do sistema pode ser vista na figura 5.1.



**Figura 5.1:** Sistema massa-mola de 1 grau de liberdade.

Na ausência de forças dissipativas, as equações que regem o movimento podem ser obtidas escrevendo-se a conservação de energia e derivando-se uma vez. No entanto, é possível escrever diretamente a 2ª Lei de Newton, sendo a única força atuante a força de restituição elástica. No caso de uma força elástica que obedece à Lei de Hooke, ou seja há uma constante que relaciona força e deslocamento, depois de rearranjada, a expressão para um sistema de um grau de liberdade fica:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.1)$$

ou,

$$\ddot{x} + \omega_n x = 0 \quad (5.2)$$

com,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.3)$$

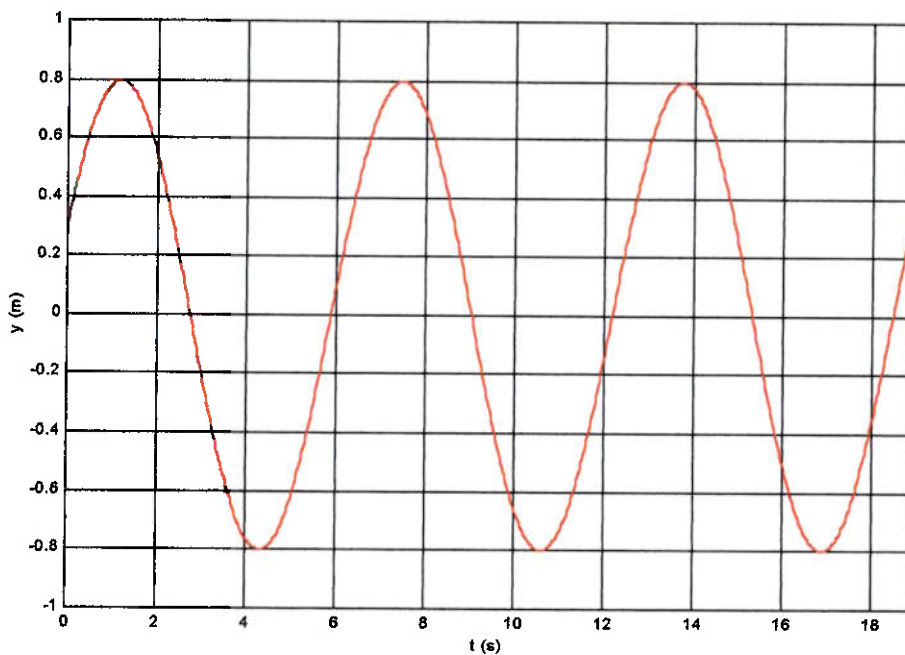
cuja solução é:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (5.4)$$

onde,

$x$	=	Deslocamento	(m)
$\omega_n$	=	Frequência natural	(rad/s)
$k$	=	Rigidez	(N/m)
$m$	=	Massa	(Kg)
$A$	=	Amplitude	(m)
$\phi$	=	Fase	(rad)

A representação gráfica da solução pode ser vista na figura 5.2 a seguir.



**Figura 5.2:** Solução de um sistema massa-mola de um grau de liberdade.

## 5.2. Sistema massa-mola com “n” graus de liberdade

As expressões acima referem-se a um sistema de apenas um grau de liberdade, porém há casos em que não é possível modelar um sistema apenas

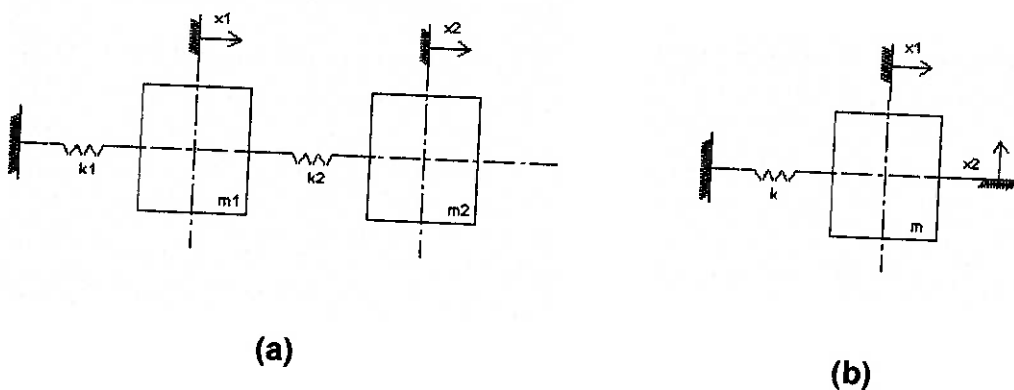
com uma coordenada, como é mostrado nas figuras 5.3 (a) e (b). Ainda assim, os resultados de um sistema composto por apenas um grau de liberdade podem ser facilmente generalizados para um outro contendo  $n$  graus, bastando escrever a 2ª Lei de Newton para cada massa, nas direções em que há deslocamento, e considerando-se todas as forças de restituição elástica de acordo com a geometria e natureza do sistema. Para um sistema linearizado, pode-se escrever:

$$[M] \cdot \ddot{x} + [K] \cdot x = 0 \quad (5.5)$$

sendo,

- $x$  = Vetor de deslocamento (m)
- $K$  = Matriz de rigidez (N/m)
- $M$  = Matriz de massa (Kg)

A matriz de massa é uma matriz diagonal, cujos elementos são as massas  $m_{ij}$  associadas a deslocamento. Cada elemento  $x_i$  do vetor de deslocamento corresponde ao  $i$ -ésimo grau de liberdade. Já os elementos  $K_{ij}$  da matriz de rigidez representam a força de restituição elástica do  $j$ -ésimo deslocamento em relação ao  $i$ -ésimo.



**Figura 5.3:** Sistemas com mais de um grau de liberdade.

(a) Duas massas, cada uma com um grau de liberdade.

(b) Uma massa com dois graus de liberdade.

### 5.3. Freqüência natural

Um sistema mecânico unidimensional que descreve um movimento vibracional livre não amortecido repete sua trajetória ciclicamente e indefinidamente no tempo. Em outras palavras, um sistema que não está sob a ação de nenhuma excitação externa forçante e que não possui amortecimento, vibra com a sua freqüência natural  $f_n$ , que está diretamente relacionada com a freqüência natural angular  $\omega_n$  pela fórmula geral:

$$\omega = 2\pi f \quad (5.6)$$

com,

$\omega$  = Freqüência angular (rad/s)

$f$  = Freqüência (Hz)

Essa freqüência também pode ser enxergada como aquela em que a energia flui naturalmente de cinética para potencial. Como mostra a equação (5.3), ela é uma característica própria do sistema e só depende da sua massa e rigidez, que são determinadas pelo material e, no caso da rigidez, também pela geometria. Com base na equação, percebe-se que um aumento de rigidez causa um aumento da freqüência, enquanto que por outro lado um aumento de massa leva à sua diminuição. Apesar da natureza diferente e maior complexidade, esse raciocínio também vale para sistemas de  $n$  graus de liberdade.

### 5.4. Freqüências naturais e modos de vibrar

Quando se parte para a análise de um sistema de  $n$  graus de liberdade deixa de haver apenas uma freqüência natural e passam a existir  $n$  freqüências naturais. Isso pode ser visto mediante a manipulação da equação (5.5), assumindo que a solução do vetor de deslocamento é harmônica para todos os seus elementos.

$$[\mathbf{M}] \cdot \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.5)$$

pré-multiplicando por  $\mathbf{M}^{-1}$ ,

$$[\mathbf{I}] \ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.7)$$

substituindo  $\ddot{\mathbf{x}}$  pela solução harmônica e simplificando,

$$-\omega_n^2 [\mathbf{I}] \mathbf{x} + [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.8)$$

$$[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{I}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.9)$$

fazendo  $-\omega_n^2 = (\pm i\omega_n)^2 = \lambda$ ,

$$[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \lambda \mathbf{I}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.10)$$

onde,

$\mathbf{I}$  = Matriz identidade

$\lambda$  = Auto-valor  $(\text{rad}^2/\text{s}^2)$

Resolver a equação (5.10) para  $\lambda$  é apenas um problema de auto-valores. Pela natureza física e matemática do problema, os valores de  $\lambda$  são números imaginários puros conjugados. Considerando-se o módulo das raízes de  $\lambda$ , obtêm-se  $n$  freqüências naturais que são solução e que pertencem ao sistema.

A interpretação dessa multiplicidade de freqüências é que a cada uma delas está associado um modo de vibrar. É como no caso de um sistema de um grau de liberdade, só que agora além de haver uma freqüência com a qual o sistema vibra naturalmente há também uma forma, uma geometria, uma relação entre os  $n$  deslocamentos. Contudo, não há apenas uma forma possível, ou modo, mas  $n$  modos, cada um associado à sua freqüência natural. Então, o movimento resultante é uma combinação linear de todos esses modos, que depende das condições de contorno e iniciais.

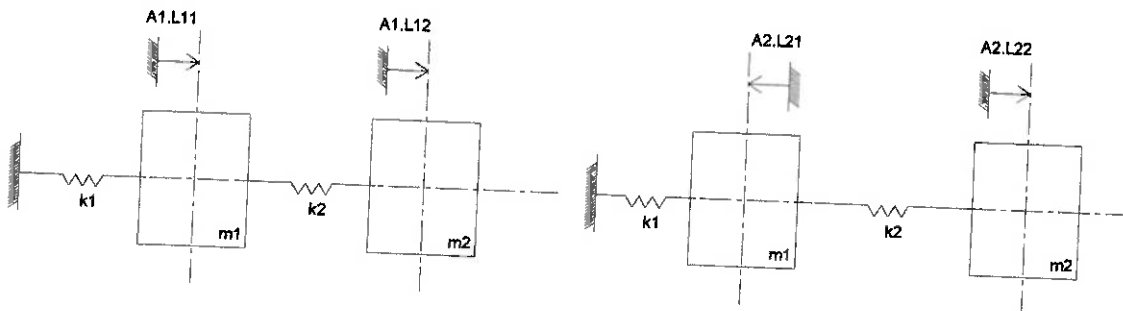
A representação matemática dos modos de vibrar proporciona inclusive uma melhor visualização: sendo  $\mathbf{L}_i$  os auto-vetores da equação (5.10), o modo de vibrar de ordem  $i$  do sistema é dado pela equação (5.11), que deve ser entendida vetorialmente:

$$x_i(t) = A_i L_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (5.11)$$

sendo,

$A_i$  = Amplitude do i-ésimo modo (m)

$\phi_i$  = Fase do i-ésimo modo (rad)



**Figura 5.4:** Exemplo de modos de vibrar.

Do ponto de vista matemático, os modos de vibrar são linearmente independentes, ortogonais dois a dois e formam uma base do espaço vetorial, que descreve todos os movimentos vibracionais possíveis. Logo, como já foi dito, o movimento resultante do sistema é uma combinação linear dos  $n$  modos de vibrar, como é mostrado abaixo, onde as amplitudes e as fases dependem das condições iniciais:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i L_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (5.12)$$

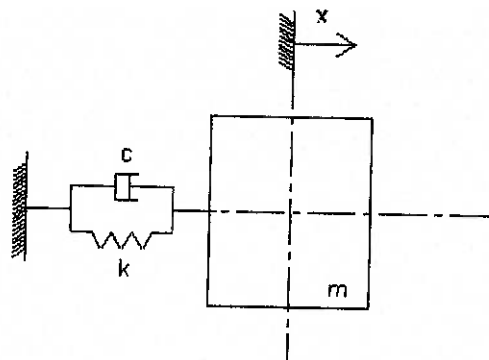
## 5.5. Sistema com massa distribuída

Até agora interessou-se por sistemas compostos por um ou mais corpos de massa concentrada. Isto é, tratam-se de sistemas pontuais ou discretos no espaço. Esse modelo é útil em muitos casos, entretanto, para outros, em que se deseja maior precisão, ou até mesmo porque a modelagem com massas concentradas é impossível, é preciso que se considere um sistema com massa distribuída, ou seja, com continuidade de massa no espaço.

Para o entendimento de um sistema de massa distribuída, pode-se partir de um sistema de massa concentrada com  $n$  graus de liberdade, cujas  $n$  massas ocupam todo o volume do corpo. Fazendo  $n$  tender a infinito, as massas tornam-se infinitesimais e chega-se ao sistema contínuo de massa. A partir desse raciocínio, conclui-se que um sistema de massa distribuída possui infinitos modos de vibrar a cada qual está associada uma frequência natural.

## 5.6. Amortecimento e frequência amortecida

Na maior parte dos sistemas mecânicos restritos, há dissipação de energia, que é transferida para fora do sistema sob as mais variadas formas. Aplicando-se esse conceito ao fenômeno de vibração, pode existir uma força dissipativa agindo sobre o sistema, que é a força de amortecimento. Ela pode surgir de diversas fontes, como da interação com o meio externo ou do uso de elementos amortecedores. Modelos mais simples e que apresentam bons resultados assumem as forças de amortecimento como sendo lineares em relação à velocidade do movimento.



**Figura 5.5:** Sistema massa-mola-amortecedor.

A força de amortecimento atua sobre as massas e muda as características de vibração do sistema. Devido à dissipação de energia, a amplitude de oscilação decresce com o tempo e tende a zero, as frequências



de oscilação do sistema assumem valores menores, que são as frequências naturais amortecidas, e os modos de vibrar têm suas formas modificadas.

Esse novo tipo de comportamento fica claro examinando-se as equações que regem esse fenômeno para um sistema de um grau de liberdade. Assumindo uma força de amortecimento proporcional à velocidade ou linearizada, o somatório de forças fica:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5.13)$$

ou,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (5.14)$$

sendo,

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (5.15)$$

Passando pela álgebra complexa, obtêm-se três tipos de solução possíveis:

$$\text{se } \zeta > 1, \quad x(t) = Ae^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + Be^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (5.16)$$

$$\text{se } \zeta = 1, \quad x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad (5.17)$$

$$\text{se } \zeta < 1, \quad x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (5.18)$$

com,

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$$

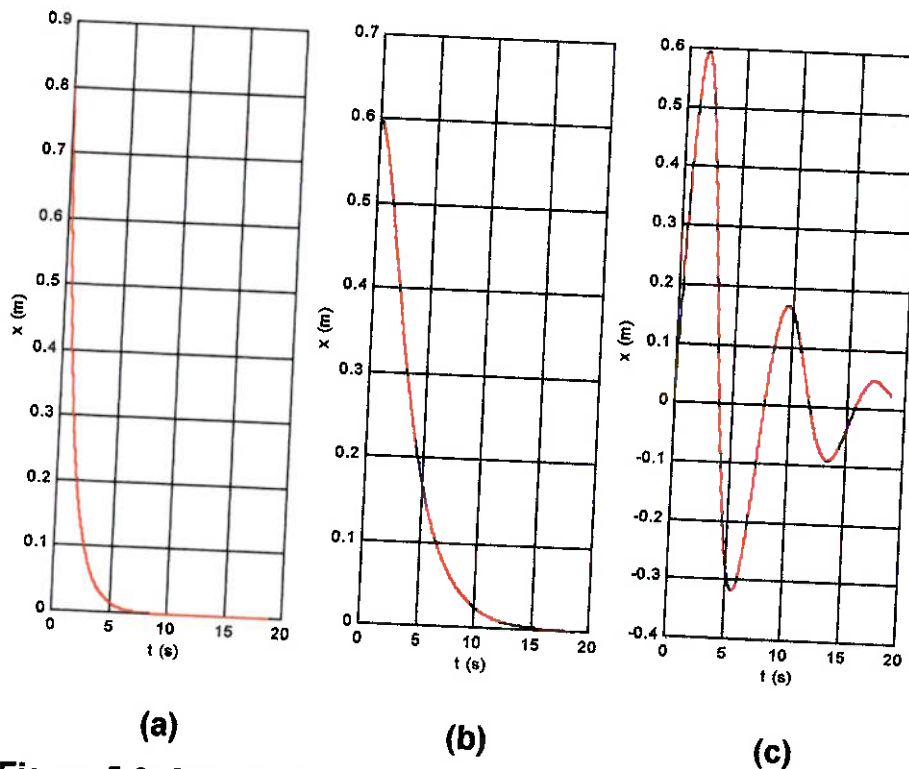
e onde,

$c$  = Constante de amortecimento ( $\text{N/ms}^{-1}$ )

$\zeta$  = Fator de amortecimento

$\omega_d$  = Frequência natural amortecida ( $\text{rad/s}$ )

As três formas que pode assumir a solução podem ser observadas nas figuras 5.6 (a), (b) e (c) abaixo.



**Figura 5.6:** Solução de um sistema massa-mola-amortecedor. Amortecimentos (a) super-crítico, (b) crítico e (c) sub-crítico.

Para as duas primeiras soluções, amortecimento super-crítico e crítico, respectivamente, o amortecimento é tal que o sistema não chega sequer a oscilar, assim não se pode falar em frequência de oscilação. Já no terceiro caso, o movimento vibracional passa a apresentar a frequência natural amortecida e o movimento se repete ciclicamente no tempo, a não ser pela amplitude que diminui exponencialmente.

### 5.7. Excitação externa

É bastante comum que um sistema dinâmico esteja submetido a ações de outras forças que não as inerciais, de restituição elástica ou de amortecimento, como na figura 5.7. A força externa modifica a resposta dinâmica do sistema, conforme é mostrado na equação abaixo, que vem do simples somatório de forças:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (5.19)$$

ou senão,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (5.20)$$

cuja solução é:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

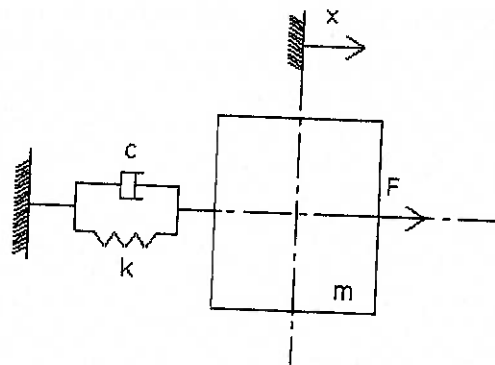
sendo,

$F$  = Força externa (N)

$x_h$  = Solução homogênea (m)

$x_p$  = Solução particular (m)

A solução dessa condição de vibração é dada pela soma da solução da equação diferencial homogênea, que representa o sistema livre, e da solução particular da equação (5.20). Permanecendo a força  $F$  ao longo do tempo e havendo amortecimento, a solução homogênea desaparece e fica apenas a solução particular, como é ilustrado pela figura 5.8. Por isso, em regime permanente o sistema comporta-se segundo a solução particular.



**Figura 5.7:** Sistema massa-mola-amortecedor forçado.

Supondo que a força externa seja senoidal, ou uma força cíclica aproximada por uma série de Fourier, obtém-se:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega_f t) \quad (5.21)$$

que possui a seguinte solução particular:

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega_f t - \psi) \quad (5.22)$$

fazendo,

$$\tan \psi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (5.23)$$

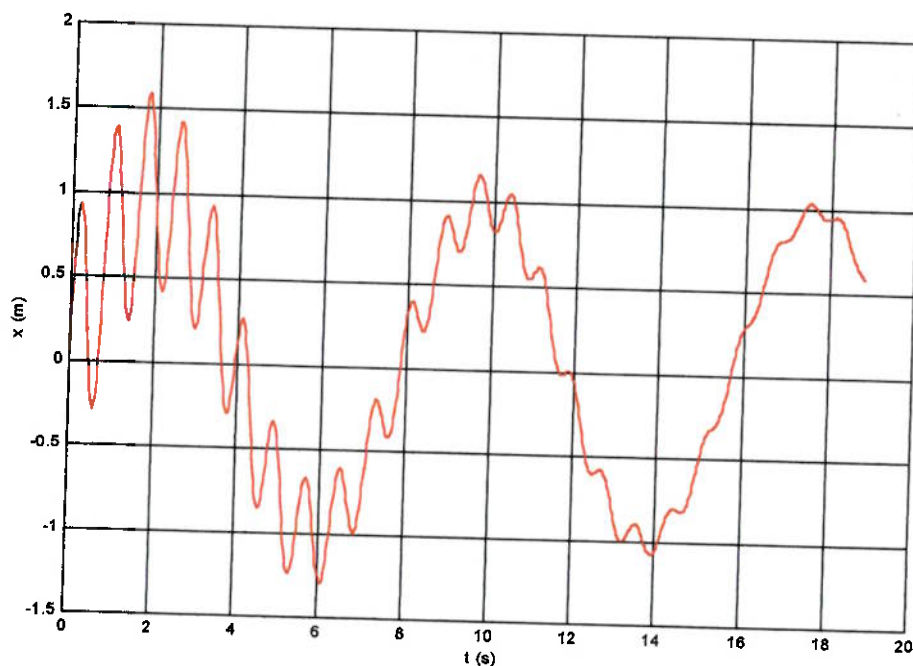
e,

$$r = \frac{\omega_f}{\omega_n} \quad (5.24)$$

onde,

$$\begin{aligned} F_0 &= \text{Amplitude da força externa} && (\text{N}) \\ \omega_f &= \text{Frequência angular de excitação} && (\text{rad/s}) \\ \psi &= \text{Atraso de fase} && (\text{rad}) \end{aligned}$$

Nota-se que com a presença de uma excitação externa, em regime permanente, o sistema oscila com a mesma frequência da força. Além disso, há um atraso de fase entre a resposta do sistema e o estímulo externo. Quanto à amplitude de vibração, é mais interessante analisá-la introduzindo o conceito de ressonância.



**Figura 5.8:** Solução de um sistema forçado massa-mola-amortecedor.

### 5.8. Ressonância

Se não houver amortecimento, o movimento em regime permanente do sistema fica:

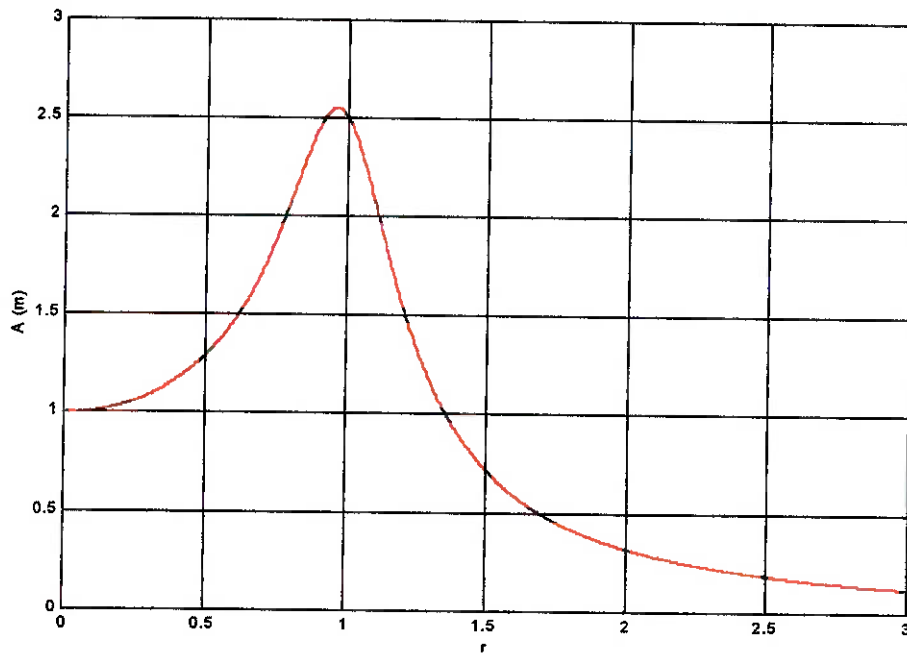
$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1-r^2} \sin(\omega_f t) \quad (5.25)$$

Percebe-se que, quando não há amortecimento,  $\zeta = 0$ , não há atraso e que, se as frequências de excitação e natural coincidirem, a amplitude do movimento tende a infinito.

Passando ao caso em que há amortecimento e em que  $\zeta < \sqrt{2}/2$ , se a frequência de excitação se aproxima da frequência natural do sistema, a amplitude de deslocamento passa por um ponto de máximo, extremamente próximo a ela. Deixa de haver um valor infinito, que dá lugar a um máximo de

amplitude, que se chama pico de ressonância e é mostrado na figura 5.9. Já o atraso de fase atinge exatamente  $\pi/2$  rad. A esse aumento da amplitude de oscilação, devido à vibração em fase do sistema com a força externa, dá-se o nome de ressonância.

Se  $\zeta \geq \sqrt{2}/2$ , não se observa o fenômeno de ressonância.



**Figura 5.9: Ressonância.**

## 6. Modelagem

### 6.1. Distribuição de massa

Com base em toda a teoria exposta acima, pode-se proceder à modelagem do rotor para a análise dinâmica.

Primeiramente, ele constitui um sistema de massa distribuída, logo, que possui infinitos modos de vibrar cada qual associado a uma frequência natural. Contudo, a experiência mostra que apenas as cinco primeiras frequências naturais são significativas, pois os demais modos apresentam magnitudes muito pequenas, portanto dificilmente apresentam energia suficiente para causar fenômenos de ressonância importantes.

### 6.2. Amortecimento e massa adicional

O rotor trabalha imerso em água, o que provoca um amortecimento viscoso, fazendo surgir forças dissipativas, o que torna necessário considerar frequências naturais amortecidas e seus respectivos modos de vibrar. Além disso, ao se incluir a água no modelo dinâmico, adiciona-se massa ao sistema o que causa a diminuição das frequências naturais, como sugere simplifcadamente a equação (5.3). Para considerar o efeito dinâmico da água seria necessário incluí-la no modelo, mas se possuem resultados de simulações, comprovados experimentalmente, que relacionam as frequências naturais do rotor com aquelas dele imerso em água. Esses coeficientes estão mostrados na tabela a seguir.

**Tabela 6.1:** Relação entre frequência natural e amortecida.

Número de diâmetros nodais <sup>(*)</sup>	$\omega_d / \omega_n$
$k = 0$ <sup>(**)</sup>	0,4 – 0,5
$k = 0$ <sup>(***)</sup>	0,73 – 0,78
$k = 1$	0,5 – 0,6
$k = 2$	0,6 – 0,65
$k = 3$	0,58 – 0,63
$k = 4$	0,6 – 0,65

<sup>(\*)</sup> Linhas diametrais de deslocamento nulo. <sup>(\*\*)</sup> Modo de viga. <sup>(\*\*\*)</sup> Modo de torção.

Nos cálculos teóricos, os máximos dessas faixas de valores são geralmente preferidos, por serem os que, na maioria das vezes, proporcionam a melhor correlação com os resultados experimentais.

### 6.3. Condições de contorno

Restam as condições de contorno. O rotor é montado ao eixo através de um acoplamento indeformável o que elimina da análise vibracional os demais graus de liberdade da máquina, como por exemplo aqueles relativos ao eixo. Assim as vibrações do resto da instalação aparecem como excitações externas, mas não influenciam os modos de vibrar e frequências naturais do rotor. A montagem com o acoplamento é realizada com parafusos pré-tensionados. Então, diante desses dois fatores, assume-se que a face superior do cubo está completamente engastada.

Quanto às forças de excitação, elas são muitas e provêm de diferentes fontes. Elas estão descritas na tabela a seguir e, logo abaixo, estão os parâmetros envolvidos e suas faixas de valores típicos. Pode-se ver na figura 6.1 um exemplo de vórtice induzido pelo escoamento que é capaz de causar problemas de vibração.



**Tabela 6.2:** Excitações forçadas atuando sobre o rotor.

Origem	Frequência de excitação
Dinâmica do escoamento	Frequência de Rheinghans: $\frac{n}{C_R}$
Desbalanceamento e desalinhamento	Rotação nominal do rotor: $n$
	Rotação de disparo: $n_d$
Flutuação de pressão	$n \cdot Z_R$
	$n \cdot Z_G$
Interação geométrica com a estrutura	$\frac{n \cdot Z_G \cdot Z_R}{Z_G - Z_R}$
Inércia do gerador	Frequência da rede: $f_R$

com,

$C_R$	=	Constante de Rheinghans	(3,6)
$n$	=	Rotação nominal	(70 – 450 rpm)
$n_d$	=	Rotação de disparo	(120 – 800 rpm)
$Z_R$	=	Número de pás	(11 – 16)
$Z_G$	=	Número de palhetas diretrizes	(20 – 30)
$f_R$	=	Frequência da rede elétrica	(50 / 60 Hz)

A força de Rheinghans aparece devido à dinâmica do escoamento e está relacionada à formação de vórtices. A sua frequência é dada pela razão entre a rotação nominal e uma constante adimensional, qualquer que seja o rotor.

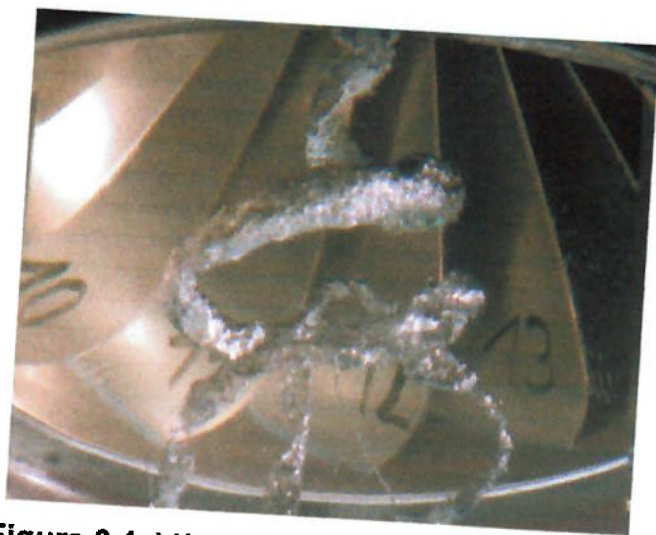
Por se tratar de um sistema rotativo, em caso de desbalanceamento ou desalinhamento da turbina, surgem forças radiais cíclicas nos mancais, que podem excitar todo o sistema com a mesma frequência que a rotação da máquina. A maior parte do tempo, o sistema gira em sua rotação nominal, porém, frente a uma queda acentuada da demanda de energia elétrica e falha no sistema de regulação, ele pode acelerar até a chamada rotação de disparo.

Teoricamente, o desempenho hidráulico do rotor seria ótimo se houvesse uma infinidade de pás e palhetas diretrizes de espessura infinitesimal. Entretanto, na realidade, existe um número finito de pás e palhetas diretrizes, o que causa flutuações de pressão no escoamento, cujas frequências são dadas pelo produto da rotação nominal pelo número de pás ou palhetas diretrizes.

Por esse mesmo motivo, existe uma interação geométrica entre as pás e as palhetas diretrizes. Cada vez que uma pá passa por uma palheta diretriz, cria-se uma onda de pressão que pode perturbar fortemente o sistema.

Finalmente, a frequência da rede elétrica influi na dinâmica do gerador, podendo causar distúrbios ao sistema.

Para um dado rotor, todas essas forças possuem frequência de oscilação constante, que não dependem da geometria, mas apenas das características gerais da máquina. Portanto, se as frequências de excitação do sistema não se alteram, faz sentido tentar evitar a ressonância modificando suas frequências naturais.



**Figura 6.1:** Vórtice induzido pelo escoamento.

## 7. Método de simulação

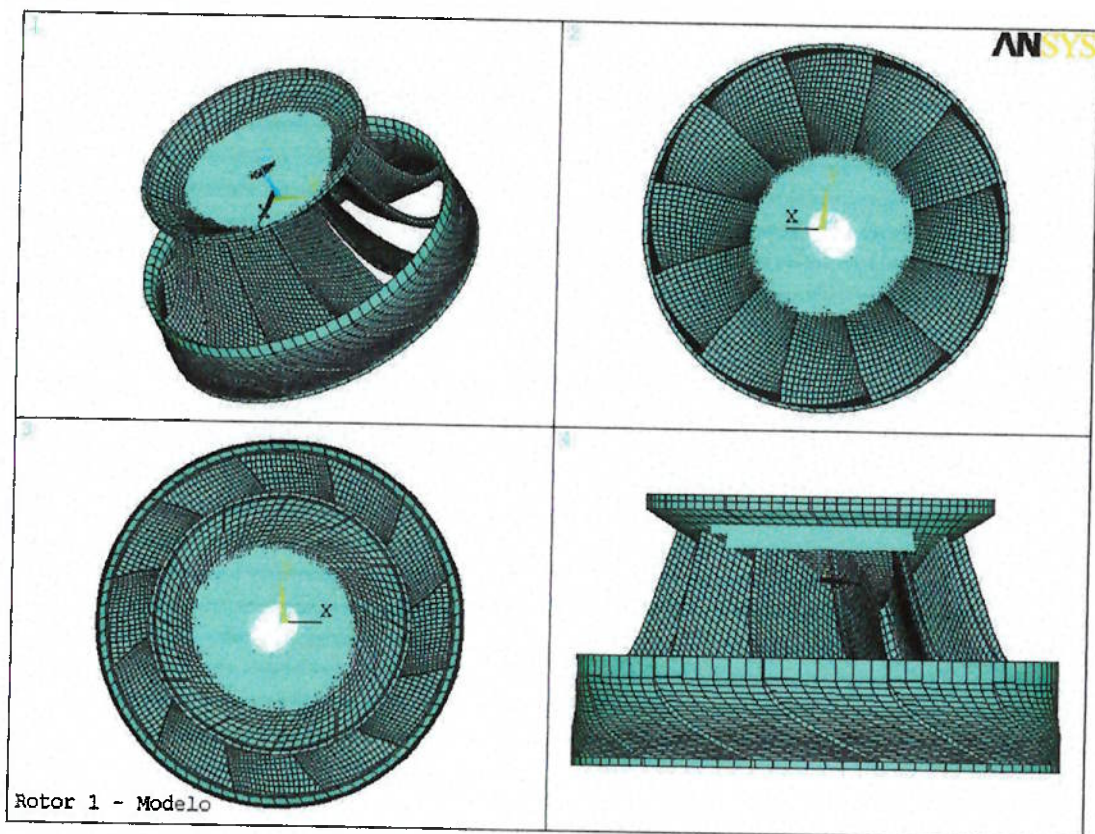
### 7.1. Método de solução e discretização

Como já foi visto anteriormente, o rotor hidráulico é um sistema de massa distribuída, que possui uma geometria bastante complexa. Embora, conheça-se a representação analítica da geometria do rotor, através de equações que descrevem sua superfície, o cálculo dinâmico torna-se inviável dessa forma.

Portanto, para que se possa resolver o sistema, é preciso proceder a uma discretização do volume do rotor. Todo o volume ocupado por ele é preenchido com pequenos elementos, como tetraedros ou hexaedros, por exemplo. Essa técnica presta-se à resolução do sistema com o método dos elementos finitos (MEF).

Para o rotor que apresentou a falha, mostrado como exemplo no capítulo 4, foi criada uma malha de elementos finitos para os cálculos, que pode ser observada na figura 7.1.

Com o modelo discretizado, o vetor de deslocamento é composto por coordenadas de deslocamento, como nas equações apresentadas acima. Assim, todas as discussões contidas na fundamentação teórica continuam válidas.



**Figura 7.1:** Malha de elementos finitos do rotor.

## 7.2. Método de cálculo

Com base no item 5.4, para determinar os modos de vibrar do sistema e suas respectivas frequências naturais, deve-se calcular os auto-vetores e os auto-valores da equação (5.10):

$$[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \lambda\mathbf{I}] \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (5.10)$$

O programa de elementos finitos encarrega-se de, a partir da malha de elementos finitos (modelo discretizado) e condições de contorno, montar a matriz de rigidez, a matriz de massa e resolver o sistema.

### 7.3. Análise de sensibilidade do erro da simulação

Ao discretizar o volume do rotor, passou-se de um sistema de massa distribuída, contínuo, com infinitos modos de vibrar e frequências naturais, a um sistema discreto de massa concentrada, com um número limitado de modos e frequências.

Ainda que o número de graus de liberdade presente no modelo de elementos finitos seja grande (como na malha acima, que possui três graus de liberdade em cada um de seus 31.296 nós, totalizando 93.888), ele não deixa de ser apenas uma aproximação do sistema físico real, com as limitações já citadas. Aumentando-se a discretização do rotor, melhoraria-se a aproximação, por se estar caminhando de volta para o sistema contínuo, porém, o custo computacional, aumenta muito mais rápido.

Entretanto, o erro da simulação com o MEF é menor nos primeiros modos de vibrar, podendo ser pouco significativo, e vai crescendo à medida que aumenta a ordem dos modos. Além disso, como já foi explicado no item 6.1, apenas os cinco primeiros modos são significativos e de interesse para fenômenos de ressonância importantes. Por esses dois motivos, espera-se que os resultados da simulação apresentem erros pequenos para esses modos de interesse.

De fato, os resultados obtidos com essa técnica foram confrontados com aqueles medidos nos ensaios de modelo, para diversos rotores. Eles revelaram que, com os coeficientes que levam em conta o efeito da água (tabela 6.1), o erro da simulação nos seis primeiros modos é desprezível, como mostra a tabela a seguir.

**Tabela 7.1:** Frequências naturais amortecidas medidas e calculadas.

Modo	Valor medido (Hz)	Valor calculado pelo MEF (Hz)	Razão entre o valor medido e calculado
1	40,0	41,6	1,04
2	40,0	42,1	1,05
3	50,0	49,5	0,99
4	82,5	81,4	0,99
5	135,0	132,4	0,98
6	203,8	199,8	0,98

## 8. Simulação e análise do exemplo

### 8.1. Características do rotor

Na tabela 8.1 abaixo, estão algumas características e dados da máquina que são necessários para os cálculos das frequências de excitação, outros são puramente informativos.

**Tabela 8.1:** Características da máquina.

Característica	Valor
Potência	165 MW
Altura de queda	44,5 m
Diâmetro característico	7000 mm
Rotação nominal	85,7 rpm
Rotação de disparo	173 rpm
Número de pás	12
Número de palhetas	26
Massa do rotor	120 T

### 8.2. Cálculo das frequências naturais e de excitação

Deseja-se realizar uma simulação do comportamento dinâmico do rotor citado como exemplo e, com base nos resultados obtidos, evidenciar o motivo da falha apresentada: a operação em ressonância.

Para isso, procede-se ao cálculo dos modos de vibrar e frequências naturais, com a malha de elementos finitos previamente apresentada e como descrito no capítulo 7. Os resultados obtidos na simulação estão na tabela 8.2, acrescidos de uma coluna para a frequência natural amortecida. Ela é calculada com base nos coeficientes máximos da tabela 6.1, como recomendado no item 6.2.

**Tabela 8.2:** Frequências naturais e amortecidas do rotor.

Modo	Número de diâmetros nodais	$f_n$ (Hz)	$f_d$ (Hz)
1	$k = 0$	19,4	9,68
2	$k = 1$	25,9	15,5
3	$k = 2$	26,4	17,2
4	$k = 3$	40,6	25,6
5	$k = 1$	41,0	24,6

As frequências de excitação do sistema também são calculadas, de acordo com o item 6.3, para que seja possível confrontá-las com as frequências naturais. Os seus valores encontram-se na tabela 8.3.

**Tabela 8.3:** Excitações forçadas atuando sobre o rotor.

Frequência de excitação		$f$ (Hz)
Frequência de Rheinghans:	$\frac{n}{C_R}$	0,39
Rotação nominal do rotor:	$n$	1,42
Rotação de disparo:	$n_d$	2,88
	$n \cdot Z_R$	16,9
	$\frac{n \cdot Z_G \cdot Z_R}{Z_G - Z_R}$	31,6
	$n \cdot Z_G$	36,9
Frequência da rede:	$f_R$	60,0

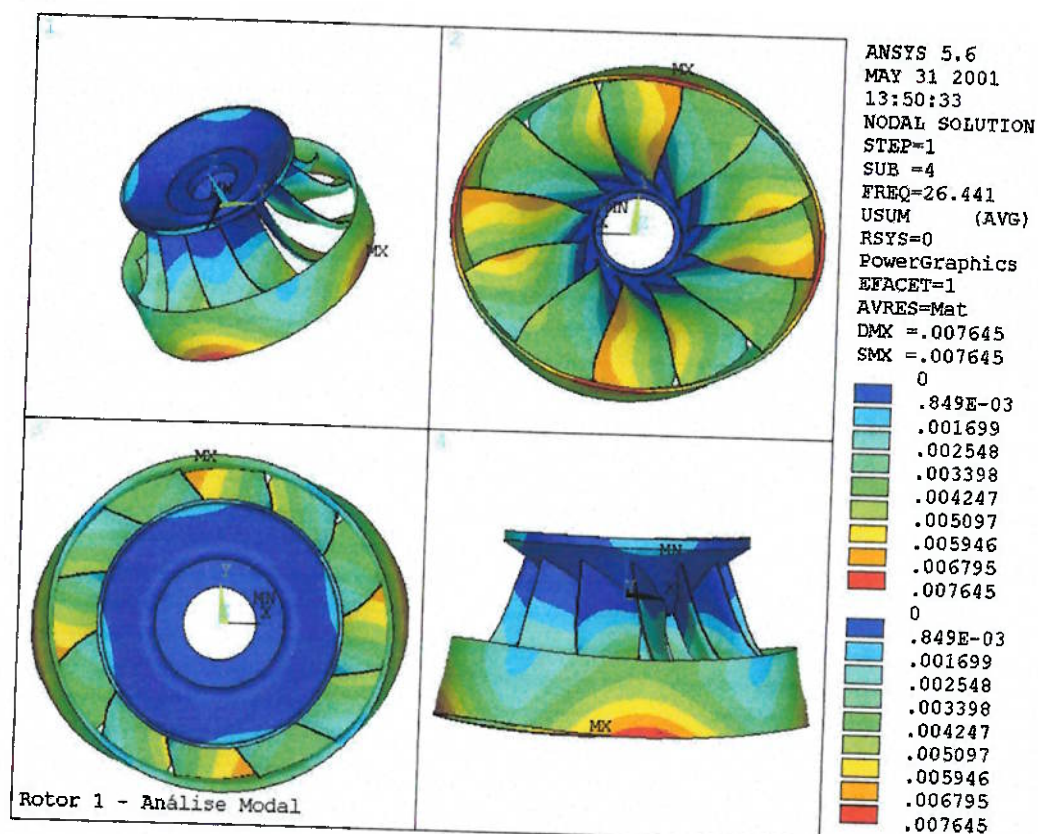
Finalmente, na tabela 8.4 é possível comparar as frequências naturais amortecidas do sistema com a frequência de excitação mais próxima e ver a razão entre as duas.



**Tabela 8.4:** Frequências naturais amortecidas e de excitação.

Modo	$f_d$ (Hz)	$f$ (Hz)	$r$
1	9,68	2,88	0,30
2	15,5	16,9	1,09
3	17,2	16,9	0,98
4	25,6	31,6	1,24
5	24,6	31,6	1,29

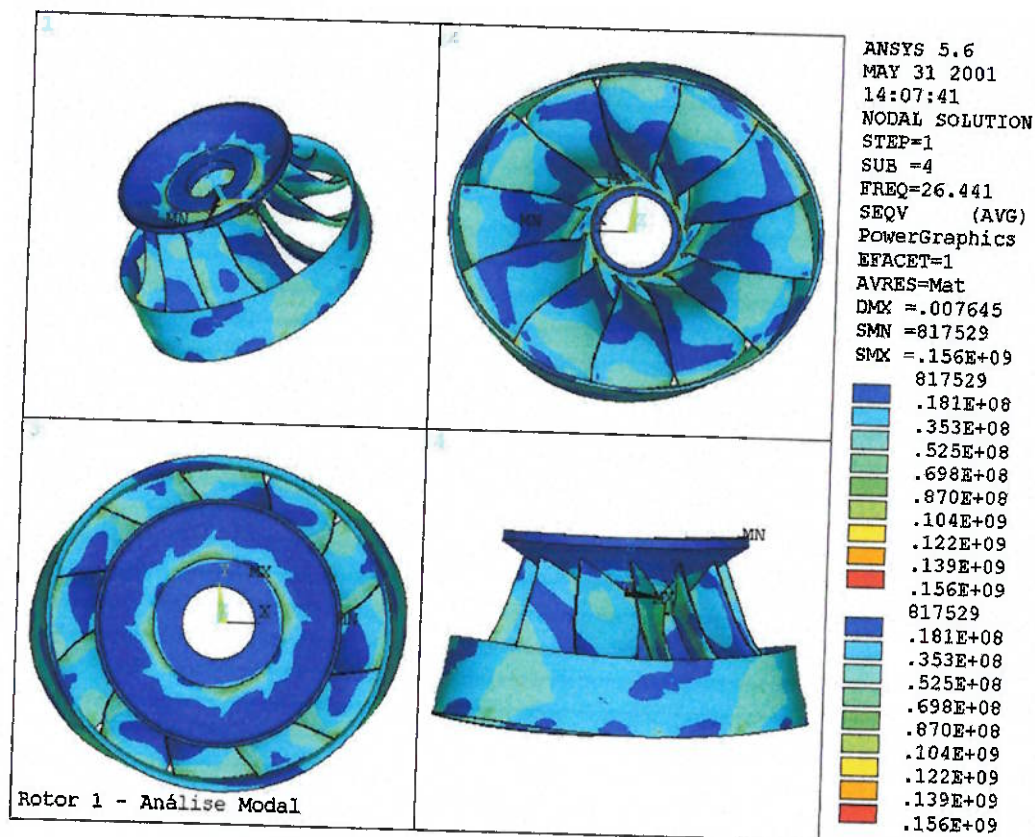
Da tabela acima, fica claro que o rotor opera em ressonância. Ela é causada pela sintonia entre a frequência natural amortecida de 17,2 Hz, correspondente ao terceiro modo, e a frequência de excitação de 16,9 Hz. O modo de vibrar associado a essa frequência natural pode ser visto na figura 8.1.



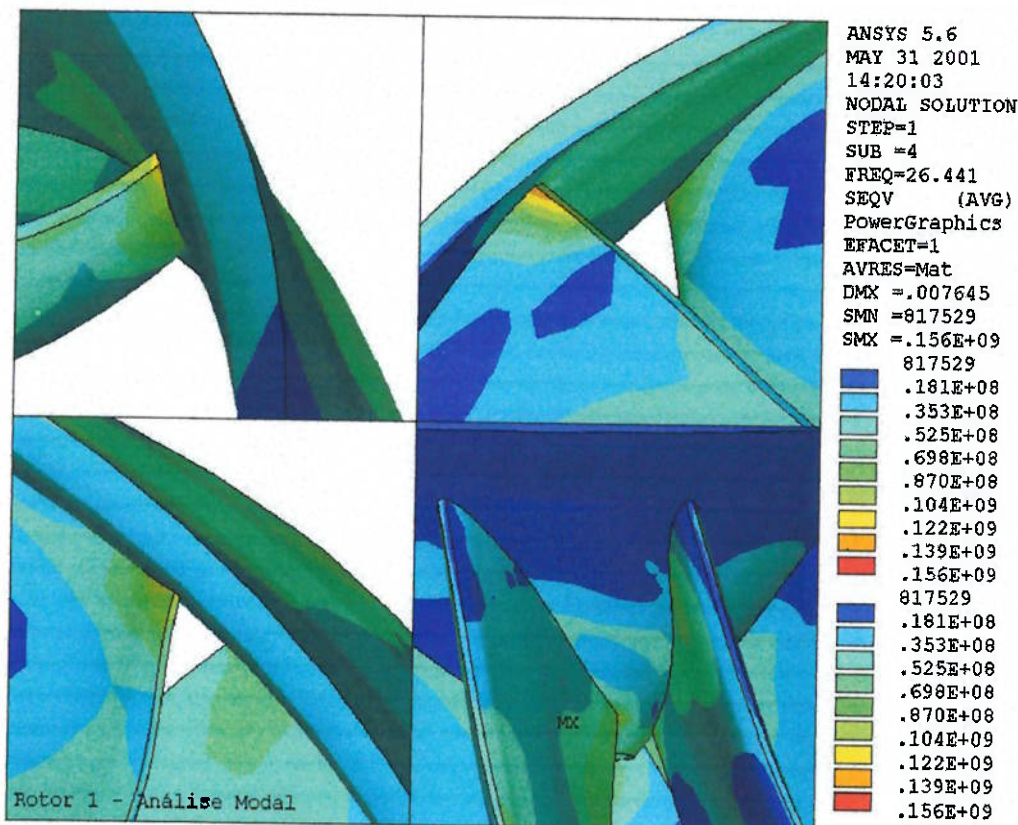
**Figura 8.1:** Deflexões normalizadas relativas ao terceiro modo de vibrar.

### 8.3. Cálculo das tensões dinâmicas

Assim como são calculadas as deflexões para os modos de vibrar, também é possível calcular as tensões mecânicas. O significado físico disso são as amplitudes de oscilação das tensões, quando o rotor opera em uma frequência natural amortecida. Elas estão representadas nas figuras 8.2 (a) e (b), para o terceiro modo, que está em ressonância.



**Figura 8.2 (a):** Tensões normalizadas relativas ao terceiro modo de vibrar.  
Vista do rotor completo.



**Figura 8.2 (b):** Tensões normalizadas relativas ao terceiro modo de vibrar.  
Vista em detalhe do local da falha.

As tensões mostradas na figura 8.2, estão normalizadas em relação à matriz de massa do sistema. Por isso, só se pode analisar o modo de maneira quantitativa, e as amplitudes de forma qualitativa. Mesmo assim, percebe-se que na junção da pá com a coroa, justamente o local onde ocorreu a falha, é onde se nota uma das maiores amplitudes de oscilação de tensão.

Por se estar operando no ponto de ressonância, mesmo sem saber exatamente qual o ganho, ou amplitude de oscilação, pode-se afirmar com segurança, que as oscilações de tensão no ponto de início de propagação da trinca são significativas e contribuíram de forma importante para a falha por fadiga.

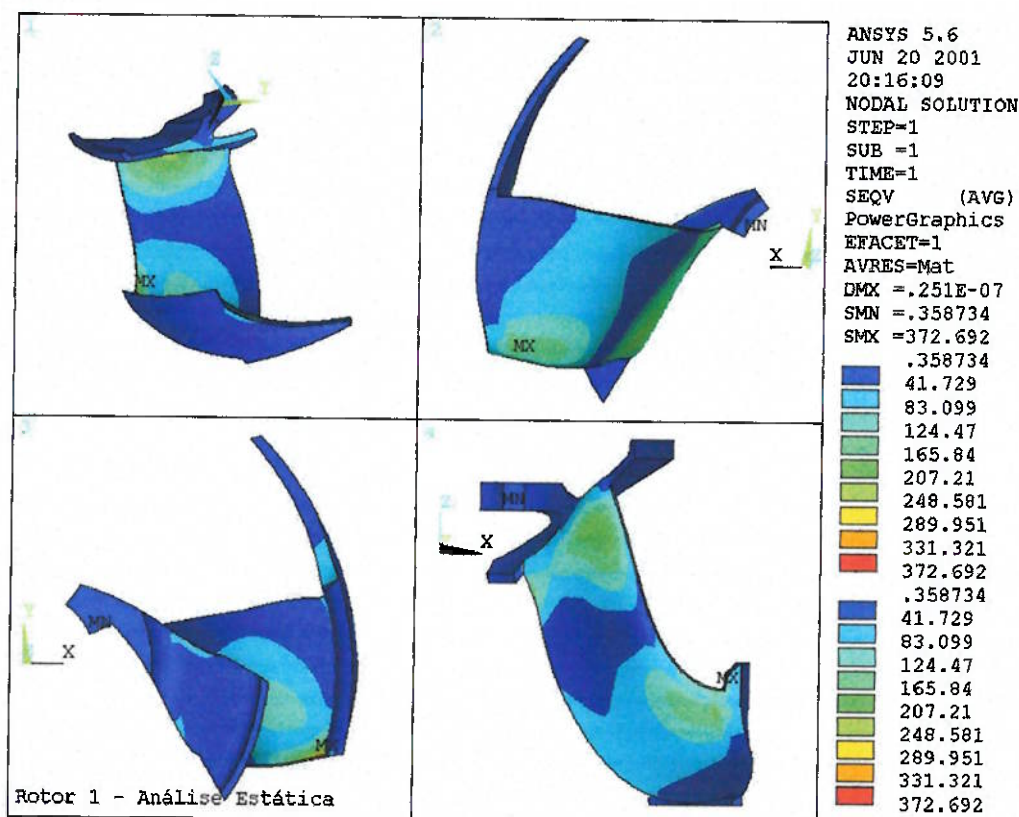


#### 8.4. Cálculo das tensões estáticas

Não é objetivo desse estudo, a análise do comportamento estático da estrutura. Contudo, para caracterizar por completo a falha por fadiga, acelerada pelo fenômeno de ressonância, também é interessante observar o nível de tensões presente no rotor, devido ao carregamento estacionário.

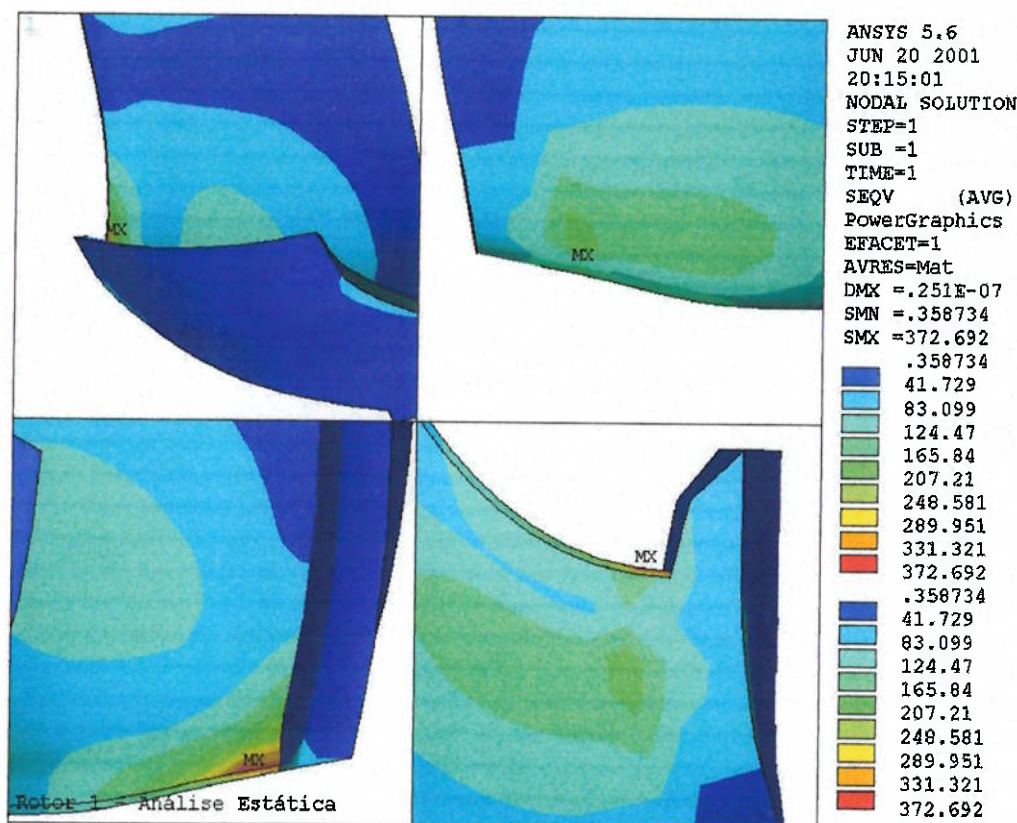
As solicitações estáticas aplicadas são a pressurização da passagem d'água e as acelerações da gravidade e centrífuga. O resultado da simulação estática, para as tensões está nas figuras 8.3 (a) e (b). Note-se que, pela simetria, apenas um setor do rotor está representado.

Verifica-se que o ponto onde se iniciou a trinca, é o mais solicitado estaticamente, atingindo 373 MPa. No entanto, esse valor não chega a ultrapassar o limite de escoamento do material da pá e da coroa, que é de 550 MPa, e resulta em um fator de segurança de 1,5.



**Figura 8.3 (a):** Tensões estáticas no rotor (em MPa).

Vista do rotor completo.



**Figura 8.3 (b):** Tensões estáticas no rotor (em MPa).

Vista em detalhe do local da falha.

## 8.5. Falha por fadiga

Ainda assim, pelo alto nível de tensão estática, somado ao fato de também se tratar de um ponto que possui uma das maiores amplitudes de oscilação de tensão, o fenômeno de fadiga é em muito incrementado. Mesmo que ao se adicionar as tensões estática e dinâmica não se ultrapasse o limite de escoamento do material, certamente, o valor médio elevado, associado à grande oscilação, causou a falha por fadiga do rotor.

É importante notar que, segundo o cálculo estático, o rotor não falharia se não fosse pelo efeito dinâmico associado à ressonância. Daí, mais uma vez a importância de se conseguir um método para se alterar as frequências naturais do sistema e afastá-lo da ressonância.

## **9. Metodologia de solução**

### **9.1. Estratégia de solução**

A abordagem utilizada para a elaboração de uma solução é a de, para especificamente o rotor dado como exemplo, resolver o problema de se alterar as freqüências naturais. A partir daí, compreender e analisar a solução encontrada, generalizar para demais rotores Francis e comprovar a generalização através de novas simulações.

O rotor estudado como exemplo é um rotor Francis típico, assim, os resultados a serem obtidos, análises e conclusões serão bastante representativos para esse tipo de componente. Isso faz com que a solução a ser encontrada possa ser aplicada a outros rotores desse tipo, com grande perspectiva de sucesso.

Entretanto, antes de buscar alternativas de solução é preciso entender como mudanças nas características geométricas do rotor resultam em alterações de massa e rigidez, levando a modificações das freqüências naturais e modos de vibrar associados.

Por isso, a seguir, com base na fundamentação teórica (capítulo 5), são feitas algumas considerações sobre o comportamento de sistemas dinâmicos e como alterações das suas características podem influir nas freqüências naturais e modos de vibrar. Também são apresentados e comentados os cinco primeiros modos de vibrar do exemplo.

### **9.2. Considerações sobre massa, rigidez, modos e freqüências naturais**


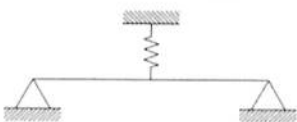

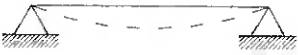
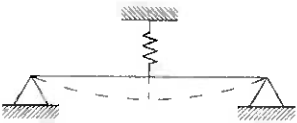

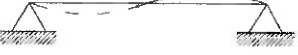
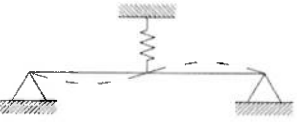

Com base na intuição induzida por um sistema de um grau de liberdade, cuja freqüência natural é dada pela equação (5.3), ao se aumentar a rigidez, cresce a freqüência natural do sistema e ao se aumentar a massa, se diminui essa mesma freqüência.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.3)$$

A partir desse fato, seria simples alterar o comportamento do rotor. Porém, essa intuição não pode ser imediatamente estendida a sistemas de mais de um grau de liberdade. Primeiramente, para que a equação (5.3) continue válida, é preciso utilizar uma rigidez e uma massa equivalentes para cada frequência natural, o que não é trivial. Além disso, o efeito da adição de massa ou rigidez, depende de como e onde ela é feita e varia sobre cada frequência natural e modo de vibrar associado.

Para ilustrar a explicação, tome-se como exemplo a viga bi-articulada da primeira coluna da tabela 9.1, cujos dois primeiros modos de vibrar também estão representados. Agora, suponha-se que se deseje aumentar as frequências naturais da viga, uma alternativa é, por exemplo, aumentar a rigidez na direção vertical no ponto médio da viga. Essa configuração pode ser pensada como uma mola fixada a esse ponto, como é mostrado na segunda coluna. Por outro lado, caso se esteja interessado em diminuir as frequências naturais da viga, uma possibilidade é de se adicionar uma massa concentrada no seu centro, a exemplo da terceira coluna.

**Tabela 9.1:** Modos de vibrar e configuração do sistema.

Modo			
1			
2			

Com a visualização dos modos de vibrar, mostrados na tabela, percebe-se que tanto o aumento de rigidez quanto de massa têm influência sobre o primeiro modo. Em ambos os casos, a frequência natural associada a ele, de fato, sofre mudanças. No entanto, nota-se que o segundo modo permanece inalterado qualquer que seja o aumento de rigidez ou de massa no centro da viga. Conseqüentemente, a frequência natural desse modo continua a mesma.

Com as duas configurações propostas, pode-se alterar tanto quanto se queira o primeiro modo que o segundo e sua frequência natural permanecem inalterados. Se a rigidez da mola tender a infinito, o que equivale a substituí-la por um apoio simples, o primeiro modo deixa de existir, contudo, mesmo assim, nada ocorre com o segundo.

A explicação para esse comportamento é que as mudanças de massa e rigidez foram efetuadas em um ponto que, no segundo modo, possui deslocamento vertical nulo, ou seja, em um ponto nodal. Por isso não há nenhuma alteração na dinâmica, pois o ponto em questão está parado.

Um exemplo mais simples envolvendo essa mesma viga seria aumentar a rigidez vertical ou massa em um dos pontos articulados, o que não provocaria nenhuma mudança sobre nenhum modo e frequência natural, porque esses são sempre pontos nodais.

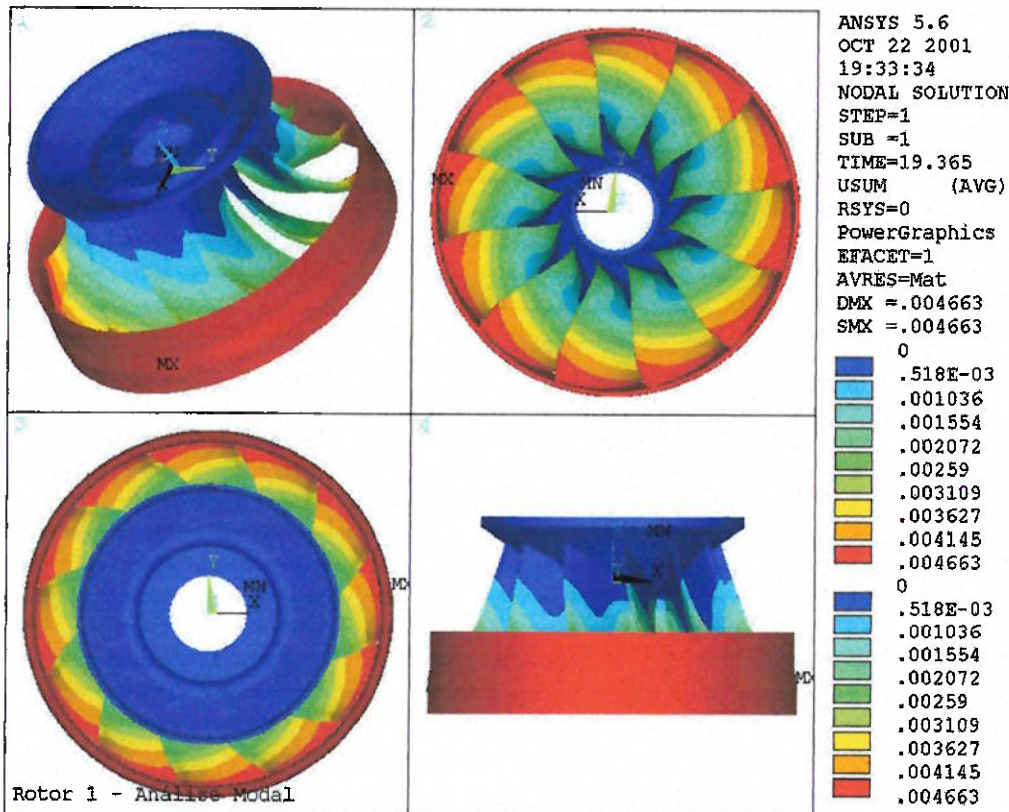
Do exemplo da viga, fica claro que, para se alterar o comportamento dinâmico de um sistema, não basta simplesmente aumentar a sua rigidez ou massa em qualquer ponto. Mesmo que se consiga alterar um modo ou frequência natural, isso não implica necessariamente em mudanças nos demais.

Conclui-se que, para alterar o comportamento dinâmico do sistema, se deve focar em um ou alguns poucos modos em específico, entender o seu comportamento, considerar que modificações em pontos ou direções de deslocamento nulo não surtem efeito e preferir os locais e direções de maiores deflexões. Assim, torna-se necessária a compreensão e o conhecimento dos modos de vibrar existentes.



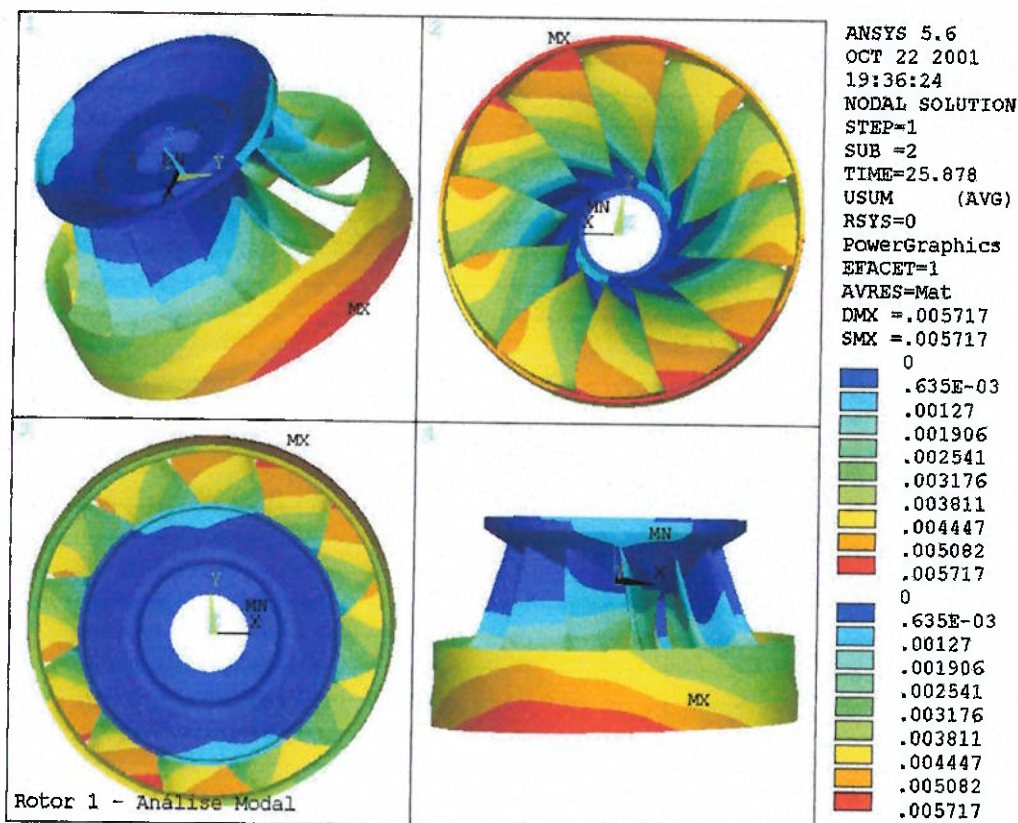
### 9.3. Modos de vibrar de um rotor

Do que já foi discutido acima, o rotor empregado como exemplo constitui um exemplo típico de rotores Francis e o seu comportamento é bastante representativo. Por isso estão mostrados, nas figuras 9.1 a 9.5, e comentados abaixo, os seus cinco primeiros modos de vibrar.



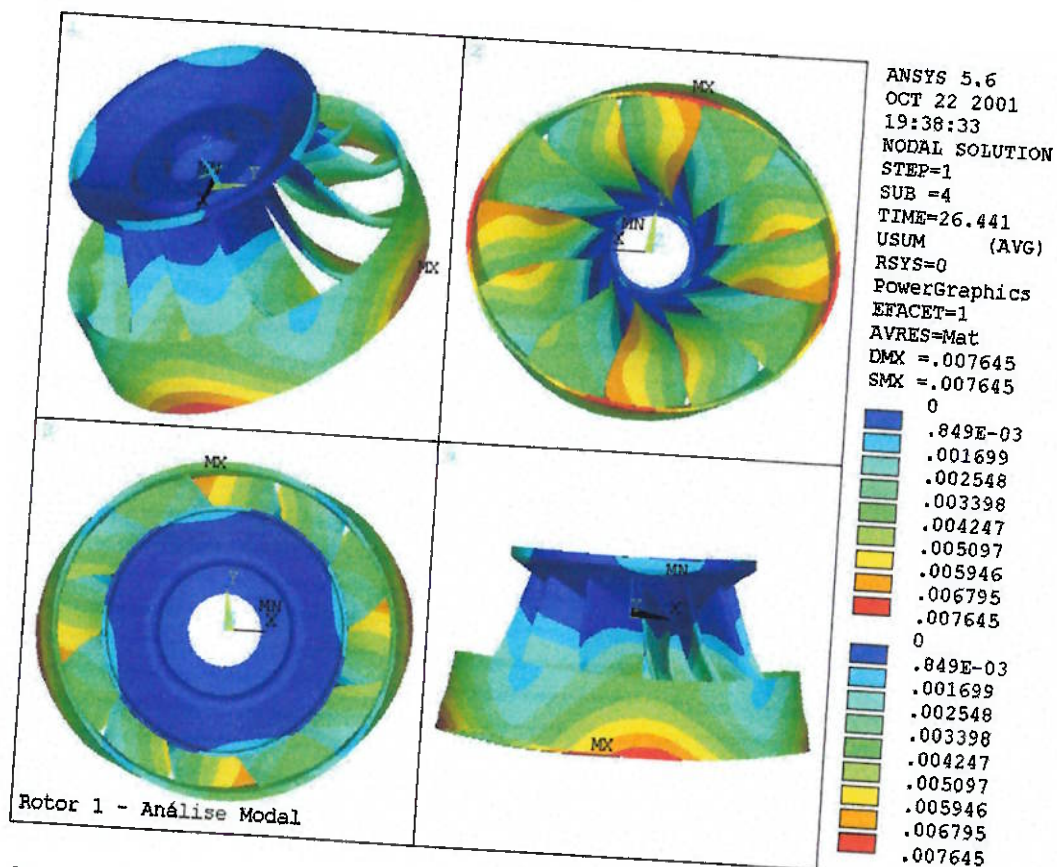
**Figura 9.1:** Primeiro modo de vibrar (deflexões normalizadas,  $f_n = 19,37$  Hz).

No primeiro modo de vibrar, a coroa movimenta-se como um todo para cima e para baixo na direção vertical, como se fosse um corpo rígido e apresentando as maiores amplitudes de deslocamento. Já o cubo permanece inteiramente estático.



**Figura 9.2:** Segundo modo de vibrar (deflexões normalizadas,  $f_n = 25,88$  Hz).

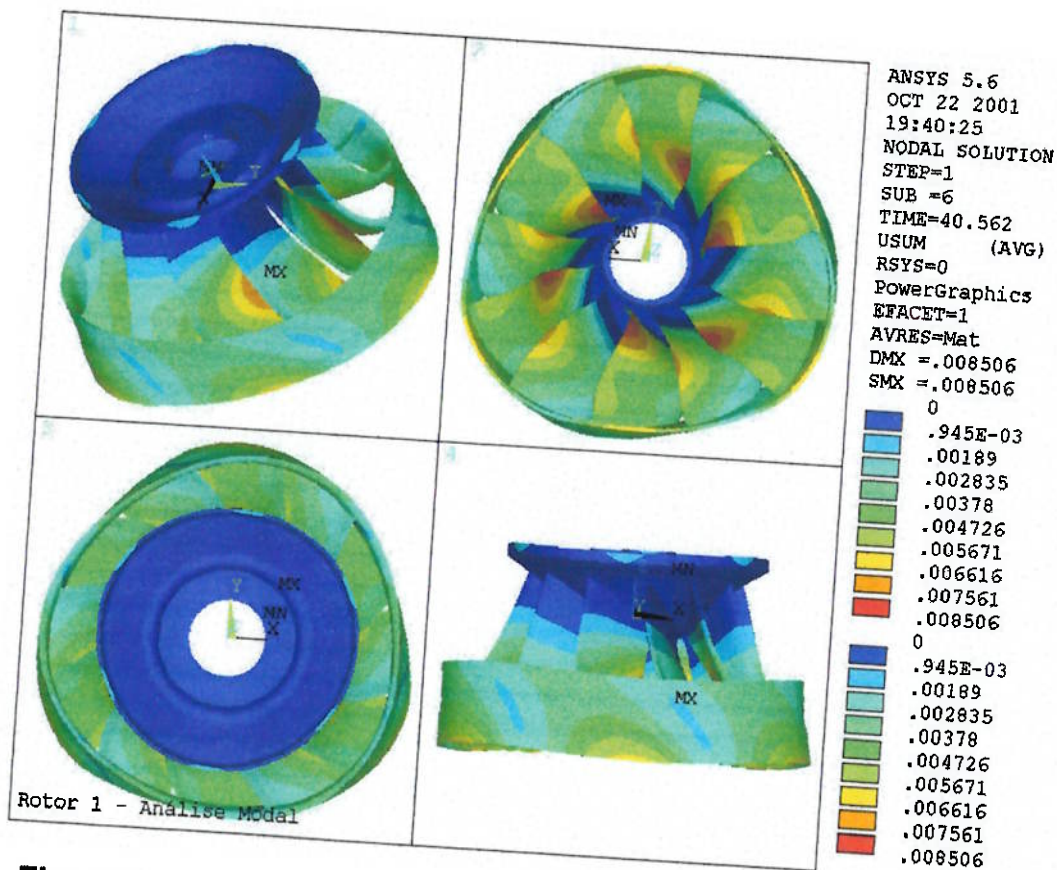
O segundo modo apresenta uma linha nodal na parte superior do cubo, passando pelo centro. Trata-se de um diâmetro nodal. Assim como no modo anterior, a coroa se desloca para cima e para baixo na vertical, mas agora ela também passa a se fletir em uma direção.



**Figura 9.3:** Terceiro modo de vibrar (deflexões normalizadas,  $f_n = 26,44$  Hz).

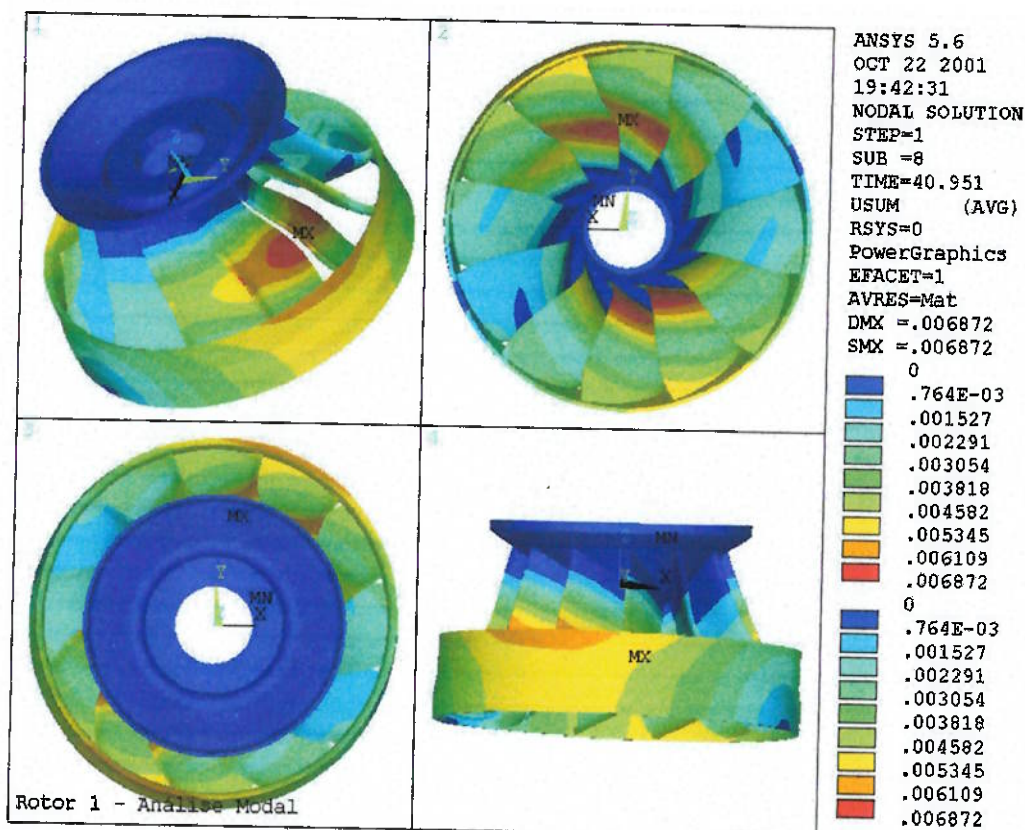
Já no terceiro modo, o cubo continua praticamente parado, porém agora os diâmetros nodais são dois. A coroa ainda apresenta um pequeno movimento de corpo rígido. Entretanto, o seu movimento mais importante passa a ser a flexão em duas direções, levando a uma certa ovalização. Vale lembrar que, devido à sua frequência natural amortecida, esse modo se mostrou como sendo o mais crítico para a operação do rotor e principal motivo da falha.





**Figura 9.4:** Quarto modo de vibrar (deflexões normalizadas,  $f_n = 40,56$  Hz).

O quarto modo segue a mesma tendência do terceiro, só que a coroa se flete em três direções e não se observa quase nenhum movimento de corpo rígido da sua parte. O cubo apresenta três diâmetros nodais.



**Figura 9.5:** Quinto modo de vibrar (deflexões normalizadas,  $f_n = 40,95$  Hz).

O quinto modo mostra uma tendência um pouco diferente dos demais. O cubo permanece completamente estático e a coroa demonstra um movimento de corpo rígido de um lado para o outro, como se fosse um pêndulo ligado ao cubo pelas pás.

#### 9.4. Considerações sobre os modos de vibrar de um rotor

Das descrições e resultados mostrados no item anterior, é possível tirar algumas conclusões sobre o comportamento dinâmico dos rotores.

Percebe-se que o cubo permanece praticamente estático em todos os modos. Logo, a adição de massa ou de rigidez, na região do cubo, dificilmente pode surtir efeito para a mudança das frequências naturais. O único efeito que se pode notar sobre o cubo é que o número de diâmetro nodais presentes é o mesmo que o número de direções em que a coroa se flete. Contudo, isso se

deve ao fato de que a flexão da coroa é tal que induz pequenos deslocamentos até mesmo no cubo, portanto, mesmo com essa aparente relação, alterações no cubo não devem provocar mudanças significativas.

Já a coroa apresenta movimentos bastante importantes, que podem apresentar duas tendências: movimento de corpo rígido (primeiro, segundo e quinto modos) e flexão em uma ou mais direções (segundo, terceiro e quarto modos). Quando o movimento de corpo rígido predomina, a adição de massa à coroa, aumentando a sua espessura, pode muito provavelmente diminuir as frequências naturais desses modos.

Por outro lado, quando a flexão é mais importante, um aumento da rigidez da coroa poderia aumentar as frequências naturais. No entanto, ao se aumentar a espessura da coroa, de forma a aumentar a rigidez, a massa também aumenta, o que tende a abaixar a frequência natural. Então, atuar sobre os modos que apresentam flexão da coroa pode ser discutível, pois a adição de massa e rigidez conjunta pode não produzir nenhum efeito.

Finalmente, nota-se que as pás sofrem flexão bastante acentuada, quando a coroa se flete. Assim, um acréscimo de rigidez flexional às pás deve ser capaz de aumentar as frequências naturais desses modos. A contribuição para os modos em que a coroa possui movimento de corpo rígido tende a ser menor.

Uma vez conhecido e entendido o comportamento dinâmico do sistema e como ele possivelmente varia frente a determinadas mudanças, é possível partir para a busca de uma solução.

## 10. Formulação da solução

### 10.1. Alternativas de solução

Diante dos comentários do capítulo 9 e respeitando todas as limitações impostas pelo sistema e suas especificações técnicas, propõem-se três alternativas de solução, descritas a seguir, dentre as quais uma deve surgir como a melhor.

A primeira alternativa (figura 10.1 (a)) consiste em aumentar a massa no cubo. A segunda (figura 10.1 (b)) pretende, através do aumento da espessura da coroa, acrescentar massa e rigidez a ela. A terceira (figura 10.1 (c)) cria pás transversais às pás já existentes no rotor, de modo a tornar sua rigidez flexional consideravelmente maior. Essas pás devem ser finas e ter a forma das linhas de corrente do escoamento, para perturbar o mínimo possível o fluxo.

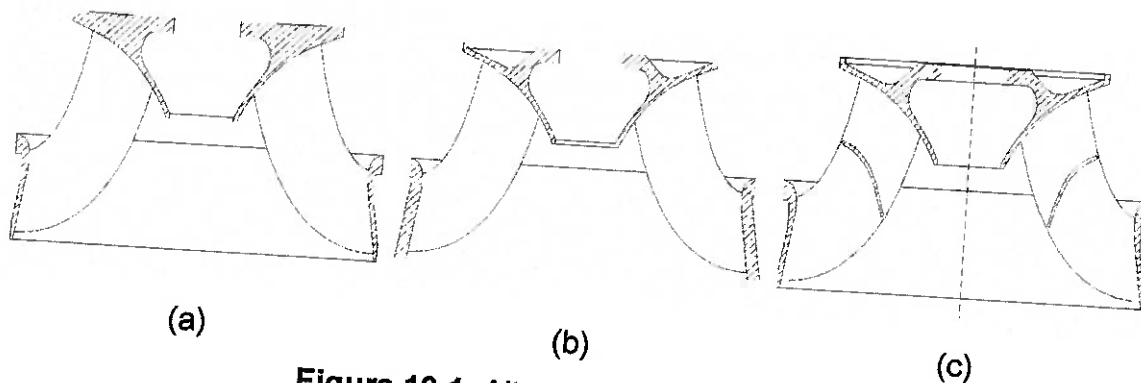


Figura 10.1: Alternativas de solução.

### 10.2. Critérios de escolha

A escolha da melhor opção deve procurar ser o mais objetiva possível e respeitar as imposições do problema. Para isso são definidos alguns critérios de desempenho:

- *Exeqüibilidade* – A solução precisa poder ser executada fisicamente.

- *Eficiência* – A solução deve ser capaz de alterar as frequências naturais do rotor. Em especial, alterar a frequência crítica do problema, cujo modo associado é o terceiro.
- *Rendimento* – A solução não deve comprometer o rendimento hidráulico do rotor, já que, como já foi dito, essa é uma imposição do problema, pois esse valor é exigido pelo cliente.
- *Custo* – A solução não deve encarecer demais o produto.

A partir desses critérios parte-se para a escolha da melhor alternativa com ajuda de uma matriz de decisão.

### 10.3. Escolha da alternativa

Em uma matriz de decisão são atribuídos pesos a cada um dos critérios de desempenho, que estão diretamente ligados às suas importâncias relativas para atingir os objetivos do problema. Então, para cada uma das alternativas são dadas notas para cada um dos itens. A alternativa com a maior soma ponderada é a escolhida.

Todas as alternativas são fisicamente exeqüíveis, por isso não há porque fazer distinção entre elas. Assim, apesar de constar na tabela, esse critério não afeta a escolha da melhor solução. Logo, o peso atribuído a ele é pequeno.

Quanto à eficiência, por toda a discussão acima, a adição de massa ao cubo não deve produzir praticamente nenhuma mudança. O aumento da espessura da coroa trazendo aumento de massa e rigidez, deve produzir um melhor resultado em relação aos modos em que ela possui tendência ao movimento de corpo rígido. Porém, quando a flexão for mais importante, o aumento de massa deve contrabalancear o de rigidez, provocando pouco efeito. A adição de rigidez por meio de pás transversais age principalmente sobre os modos com flexão da coroa, entre os quais está o terceiro que apresenta a frequência crítica, portanto deve aparecer como a mais eficiente.



Para o rendimento, as duas primeiras propostas não alteram em nada o seu valor. No entanto, a última alternativa pode potencialmente perturbar o escoamento previsto, o que a torna um pouco inferior nesse aspecto. Uma maneira de minimizar esse efeito é, de fato, fazer com que as pás transversais sejam finas e tenham a forma das linhas de corrente.

O custo a ser acrescido, devido às modificações, é determinado pela quantidade de material adicionado, usinagem e quantidade de mão-de-obra a mais requeridas. O acréscimo de massa ao cubo tende a ser consideravelmente grande, aumentando o custo do material fundido. Já no caso da coroa, o aumento de massa é bem menor. As pás transversais também não consomem muito material, entretanto, consomem horas de usinagem e mão-de-obra considerável, pois devem ser soldadas entre as pás já existentes.

Em relação aos pesos dados aos critérios, na matriz de decisão, deve-se notar que eficiência é o mais importante deles, uma vez que o êxito em se resolver o problema está diretamente ligado a ela. O critério relacionado ao rendimento é quase tão importante quanto o anterior, por não poder nunca ser desrespeitado.

Não se deve desprezar o custo introduzido pela implantação de qualquer uma das soluções. No entanto, ele tende a ser pequeno quando comparado ao montante gasto na fabricação e manutenção de um equipamento hidromecânico desse porte. Portanto, o seu peso na matriz de decisão não é tão grande.

De toda essa análise têm-se dados suficientes para se preencher a matriz de decisão objetivamente.

**Tabela 10.1:** Matriz de decisão.

Critério	Peso	Alternativa		
		Primeira	Segunda	Terceira
Exeqüibilidade	2	5	5	5
Eficiência	5	1	3	5
Rendimento	4	5	5	4
Custo	2	3	4	2
Soma		41	53	55

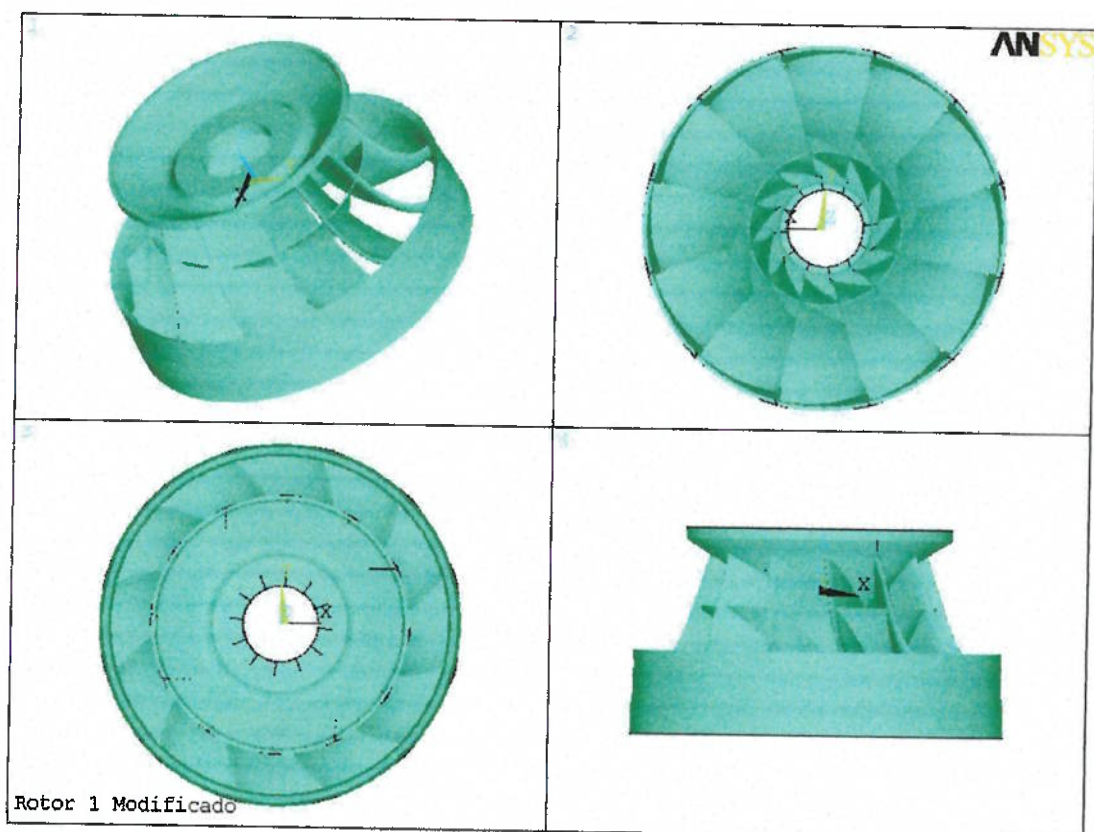
Da matriz de decisão resulta que a alternativa a ser adotada deve ser a terceira, isto é, a utilização de pás transversais.

## 11. Simulação da solução

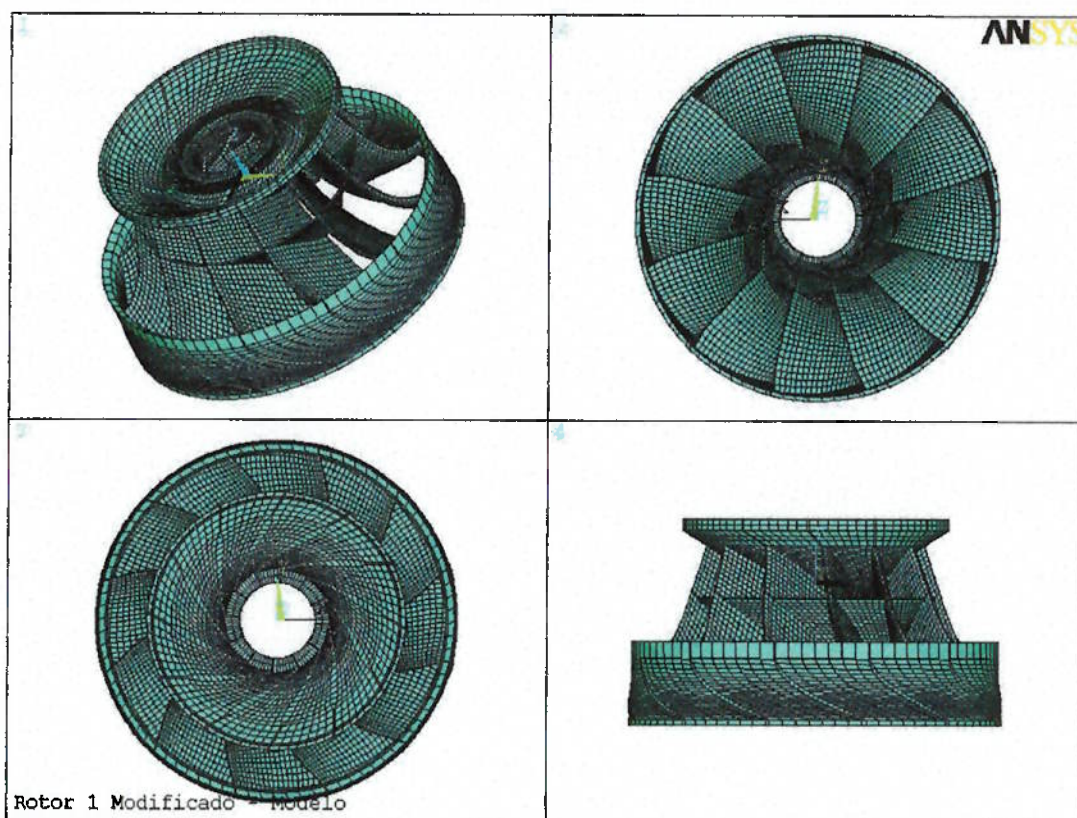
### 11.1. Modelo modificado

Conforme foi proposto acima, o rotor de exemplo foi modificado pela adição de pás transversais. A espessura da aresta de saída dessas pás é a mesma das pás originais: aproximadamente 20 mm. Com isso, além do perfil hidrodinâmico, julga-se que as pás adicionais são finas o suficiente para não influenciar no rendimento da máquina. Na figura 11.1, pode-se observar o modelo do rotor com as pás transversais.

A partir desse modelo também foi construído o modelo de elementos finitos para a simulação numérica, visto na figura 11.2. Ele possui aproximadamente o mesmo número de nós e elementos que o modelo original. Por isso, deve-se conseguir a mesma precisão e confiabilidade da primeira simulação, de modo a não influir na comparação dos resultados. Além disso, todos os comentários do capítulo 7 também são válidos aqui.



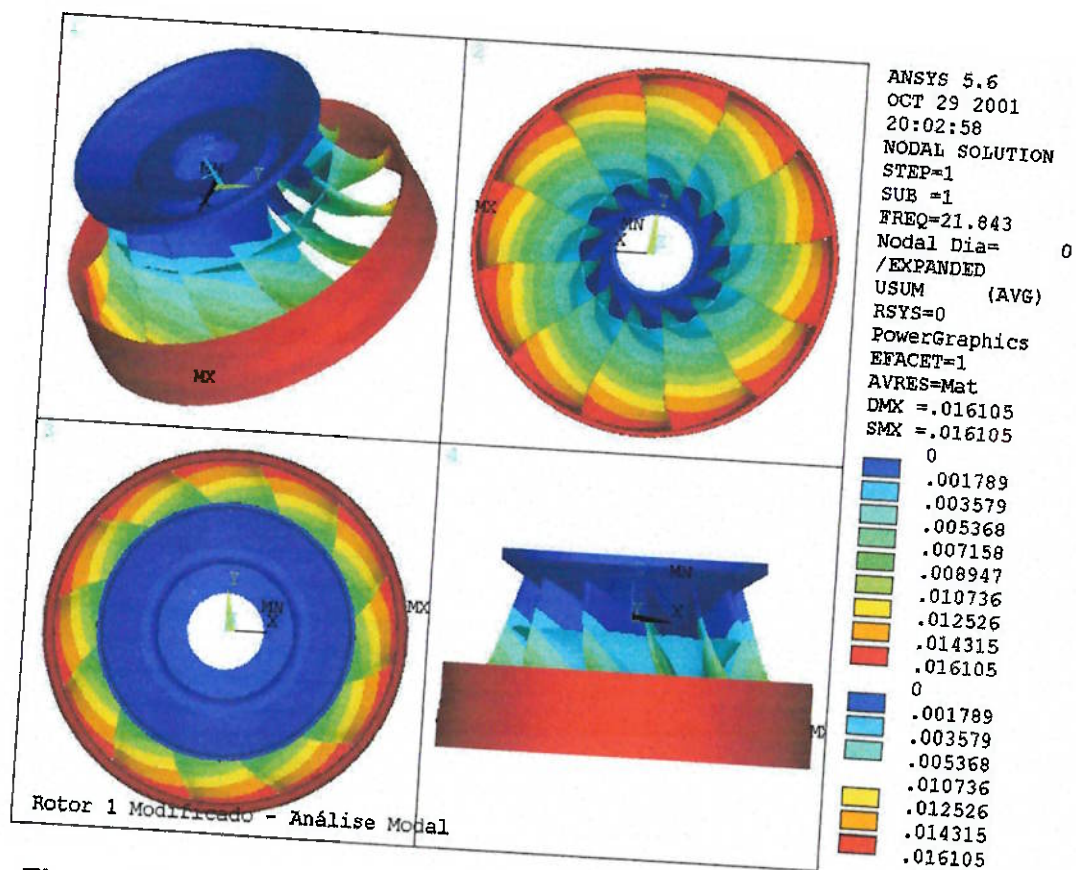
**Figura 11.1:** Rotor 1 modificado.



**Figura 11.2:** Malha de elementos finitos do rotor 1 modificado.

## 11.2. Resultados da simulação

Novamente, os resultados de interesse da simulação são os cinco primeiros modos de vibrar e suas respectivas frequências naturais. Como pode ser visto nas figuras 11.3 a 11.7, os modos de vibrar não tiveram suas formas significativamente alteradas pela adição das pás transversais. Logo, é possível afirmar que a modificação adotada não modificou a característica dinâmica do rotor.



**Figura 11.3:** Primeiro modo de vibrar modificado (deflexões normalizadas).



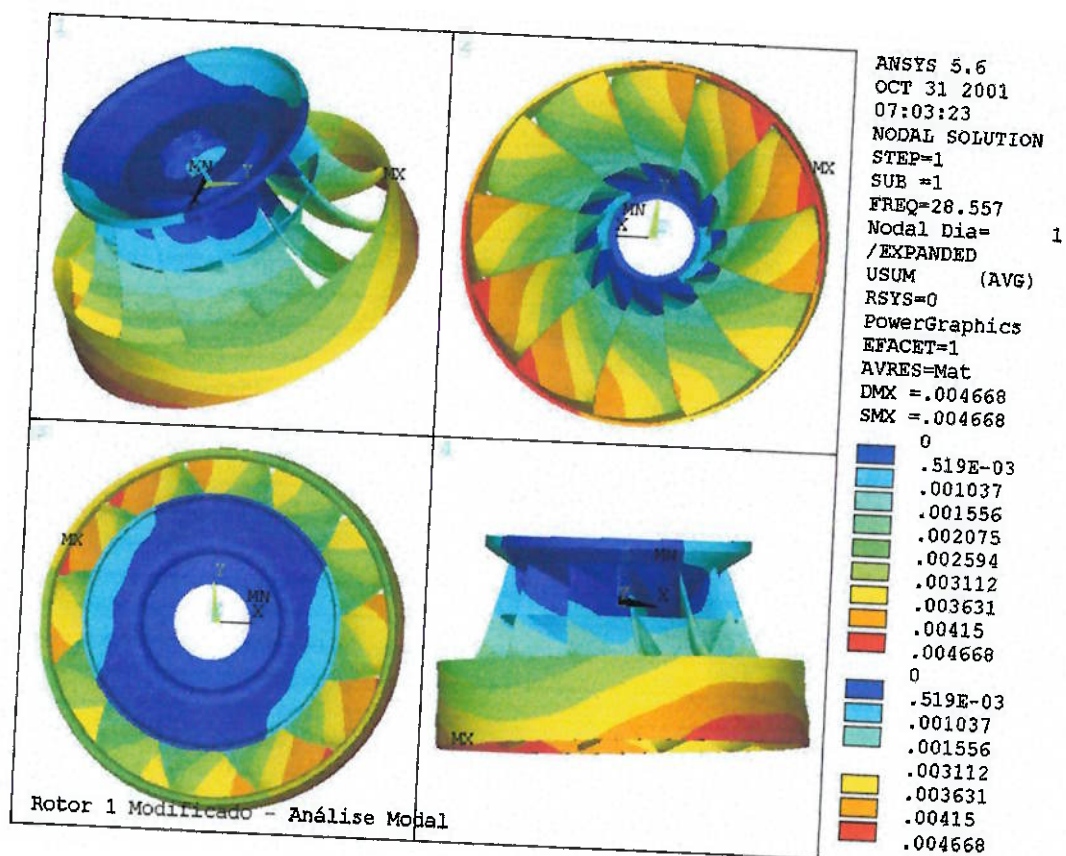
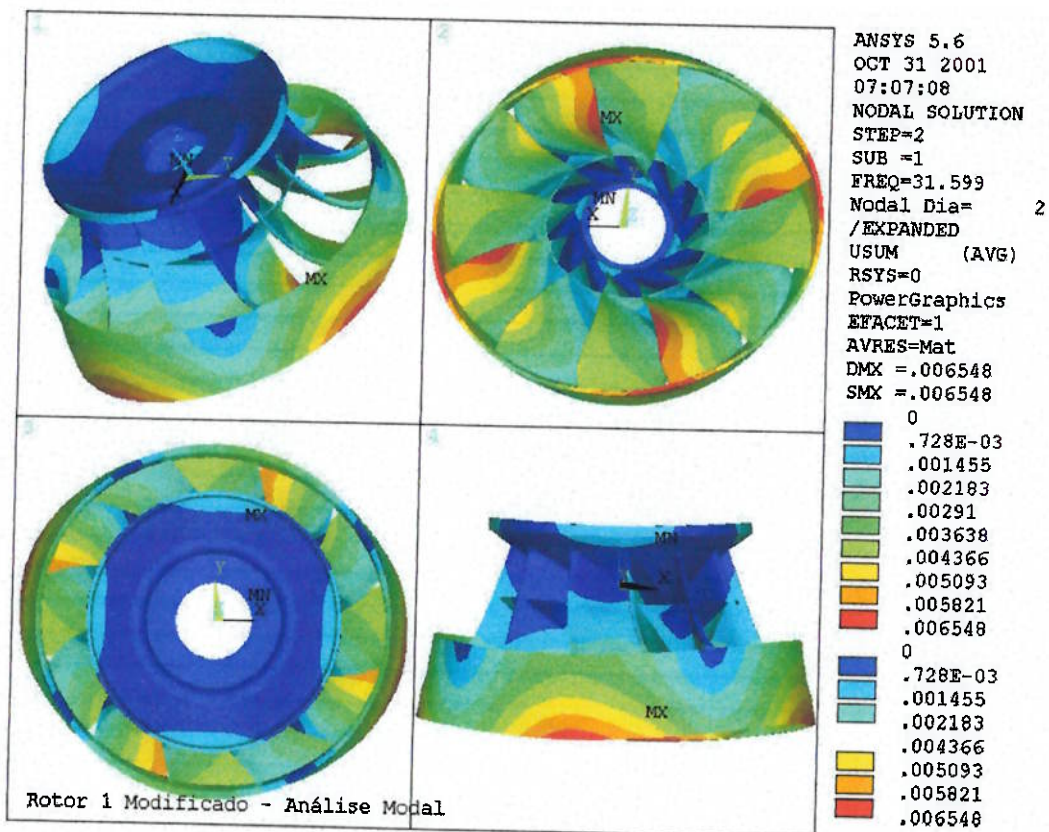
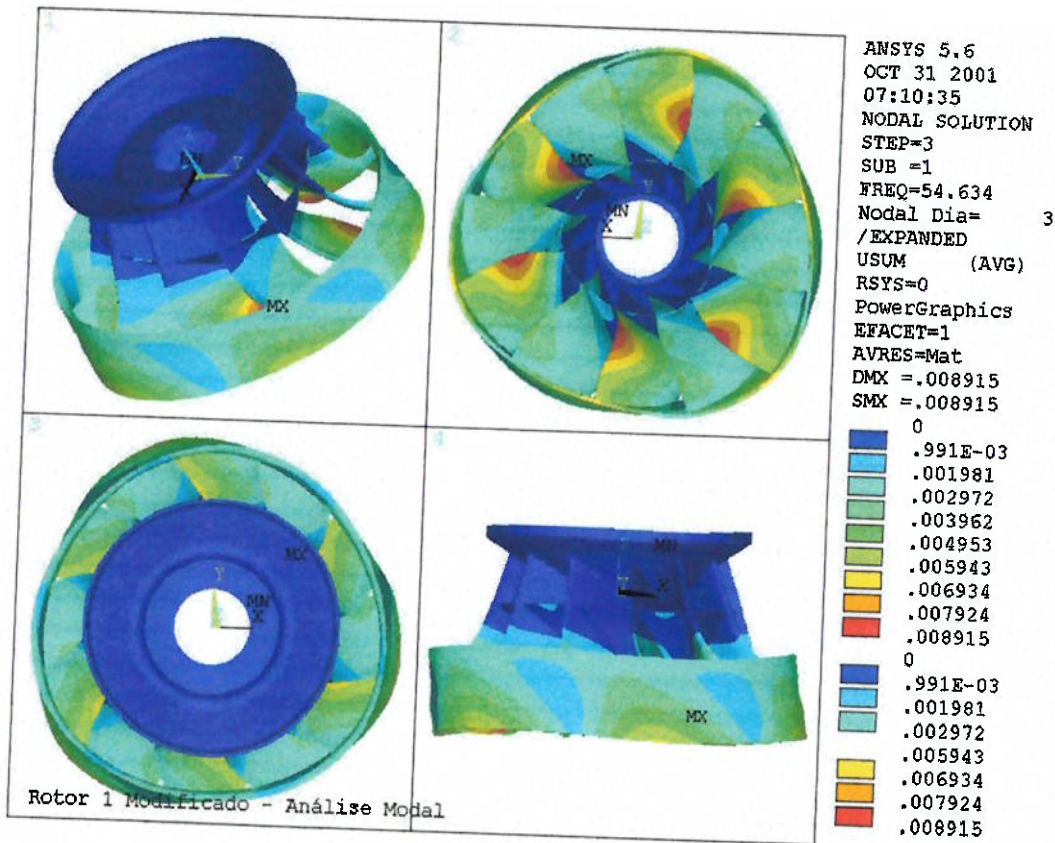


Figura 11.4: Segundo modo de vibrar modificado (deflexões normalizadas).

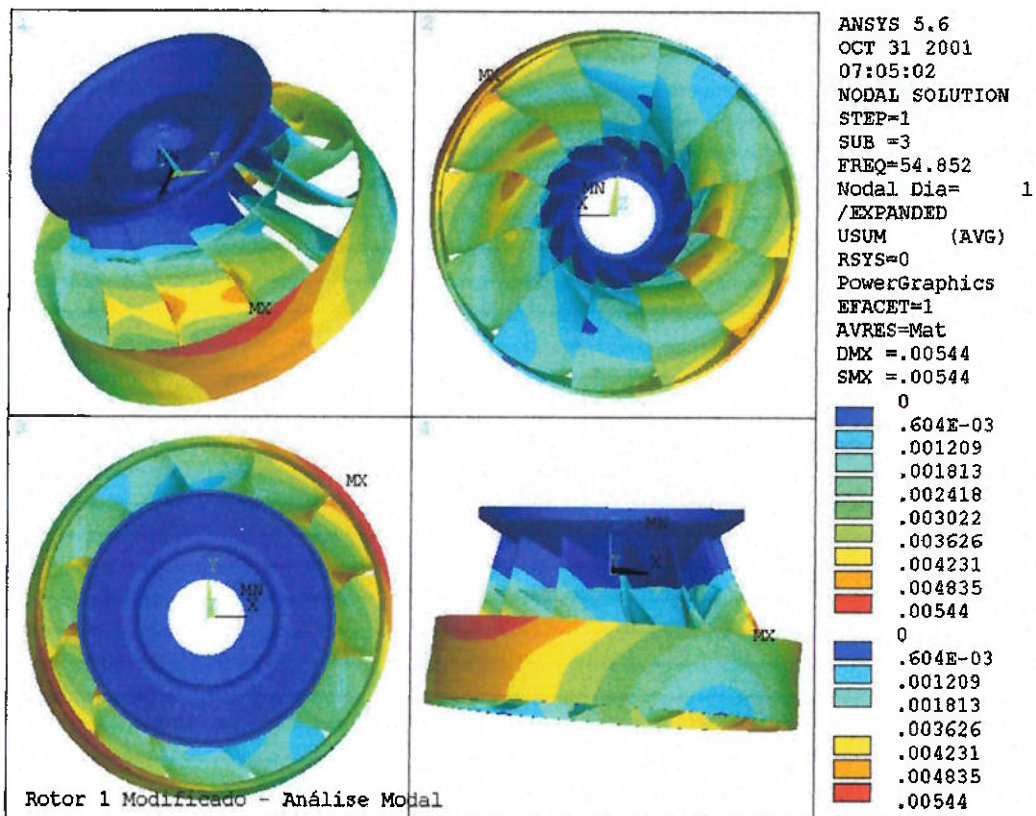


**Figura 11.5:** Terceiro modo de vibrar modificado (deflexões normalizadas).





**Figura 11.6:** Quarto modo de vibrar modificado (deflexões normalizadas).



**Figura 11.7:** Quinto modo de vibrar modificado (deflexões normalizadas).

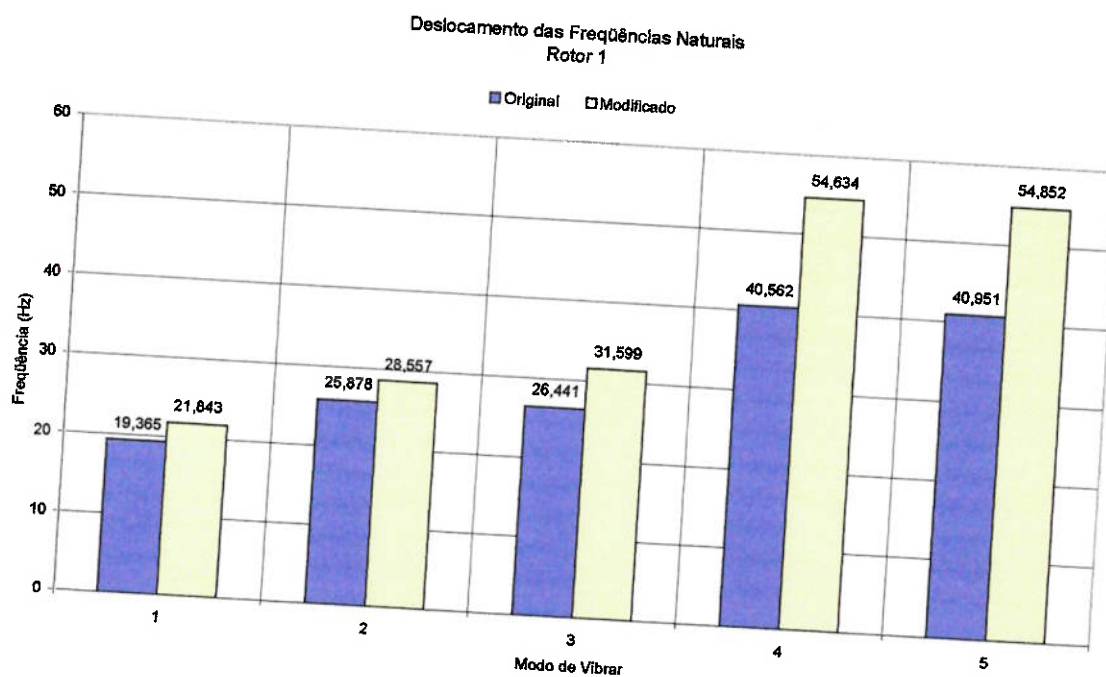
Mesmo assim, as frequências naturais sofreram alterações, como é visto na tabela 11.1. Isto é positivo, pois foi conseguido um progresso sem alterar demais a natureza do sistema. A tabela também mostra a razão entre a frequência natural do rotor modificado e original, assim como a diferença entre as duas. Esses dados são explorados na discussão dos resultados, no item a seguir.

**Tabela 11.1:** Frequências naturais originais e modificadas.

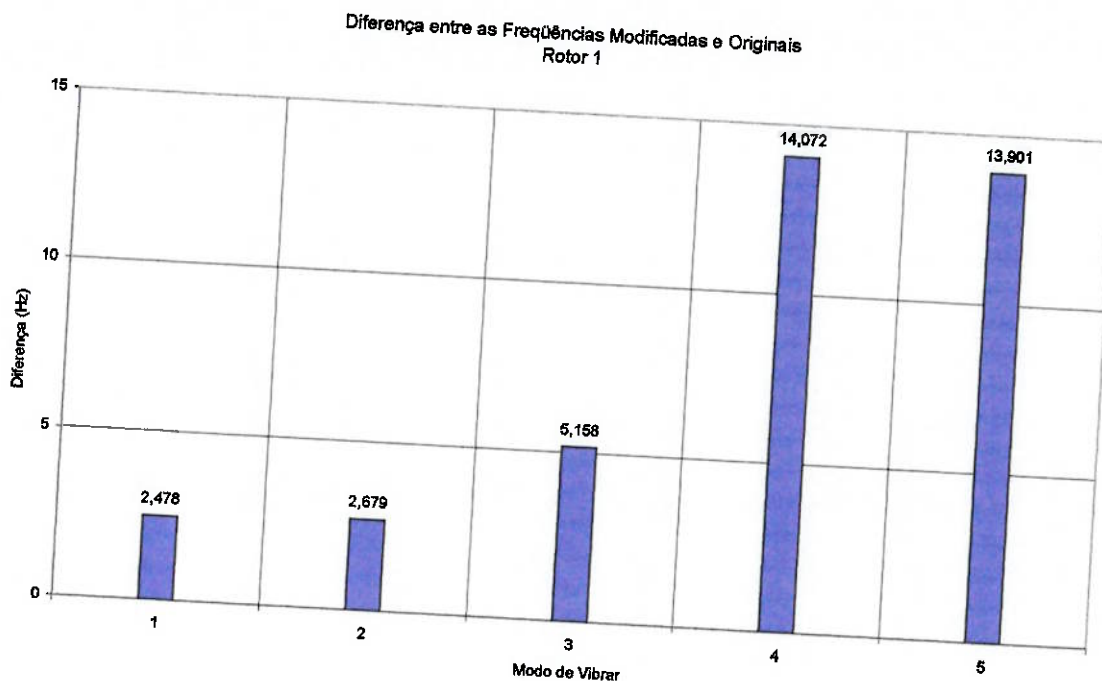
Modo	Frequência (Hz)		Razão	Diferença
	Original	Modificado		
1	19,365	21,843	1,128	2,478
2	25,878	28,557	1,104	2,679
3	26,441	31,599	1,195	5,158
4	40,562	54,634	1,347	14,072
5	40,951	54,852	1,339	13,901

### 11.3. Análise dos resultados

Como pode ser visto na tabela e na figura 11.8, todas as frequências naturais sofreram alterações devido à adição das pás transversais. Isso é natural, pois a rigidez das pás exerce efeito sobre todos os modos de vibrar, seja em maior ou menor grau. Como já foi dito acima, as pás tem menor influência nos modos em que a coroa apresenta movimento de corpo rígido e maior naqueles em que ela se flete.



**Figura 11.8:** Alteração das frequências naturais.



**Figura 11.9:** Diferença entre as frequências naturais.

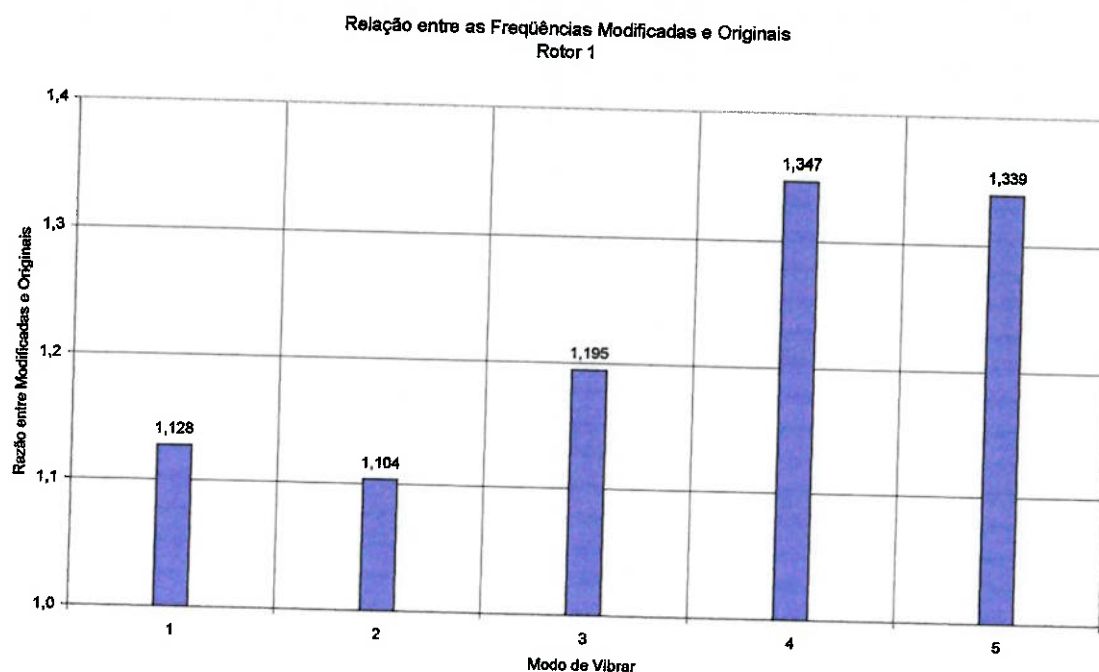
O que se observa na tabela e na figura 11.9 confirma exatamente essas afirmações. Os dois primeiros modos, em que justamente o movimento de corpo rígido da coroa é predominante, foram os que tiveram suas frequências naturais menos modificadas (de 19,4 para 21,8 Hz e de 25,9 para 28,6 Hz).

Por outro lado, o terceiro modo de vibrar mostra uma alteração já mais pronunciada da sua frequência natural (de 26,4 para 31,6 Hz).

O quarto modo foi o que teve a maior mudança na sua frequência natural, por ser aquele em que a flexão da coroa é mais importante (de 40,6 para 54,6 Hz).

No quinto ocorre algo interessante, porque nele a coroa tem movimento de corpo rígido, porém ela se comporta como se fosse um pêndulo provocando uma grande flexão das pás. Portanto, o aumento da rigidez, com as pás transversais, altera em muito a frequência desse modo (de 41,0 para 54,9 Hz), apesar da natureza do movimento da coroa.

Se for considerada a razão entre as frequências naturais do rotor modificado e do original, como é feito no gráfico 11.10, se tem uma visão da mudança relativa em cada modo. Fica ainda mais claro que os dois primeiros modos são os menos afetados pela modificação (com razões de 1,128 e 1,104), os dois últimos os mais (1,347 e 1,339) e o terceiro possui um comportamento um pouco entre essas duas tendências (1,195). Mais uma vez isso vai de encontro ao que já foi mencionado, uma vez que no terceiro modo a coroa se flete, mas ainda possui traços de movimento de corpo rígido, ou seja, um comportamento levemente misto.



**Figura 11.10:** Razão entre as frequências naturais.

#### 11.4. Considerações sobre os resultados

Toda essa análise apenas confirma todas as considerações que foram feitas sobre o comportamento dinâmico do rotor, que orientaram a busca da solução. Nota-se que a implantação da solução proposta surtiu os efeitos



esperados. Basta para isso observar os resultados para o terceiro modo, que é o crítico para esse rotor.

Originalmente, a relação entre a frequência natural do terceiro modo e a frequência de excitação mais próxima era  $r = 0,98$ . Com a frequência natural passando a ser  $f_n = 31,6$  Hz, isto resulta em uma frequência natural amortecida  $f_d = 20,5$  Hz e a relação torna-se  $r = 1,21$ . A experiência mostra que esse valor é suficiente para afastar o rotor da operação em ressonância.

Assim, pode-se dizer que o problema foi resolvido. No entanto, a principal vantagem que se tira de tudo isso é a capacidade de se alterar as frequências naturais do rotor da forma que se previu e que se deseja. Portanto, o resultado qualitativo dessa análise é tão importante quanto o aspecto quantitativo. Resta apenas comprovar toda essa teoria, análise e conclusões para outros rotores.

## 12. Generalização

Assim como planejado, deseja-se estender os resultados e conclusões das simulações para outros rotores, através de uma generalização. Para isso, um outro rotor do tipo Francis é analisado na sua configuração original, comparado ao anterior, modificado, e mais uma vez comparado.

### 12.1. Características do rotor e modelo

O segundo rotor, tomado como exemplo para a generalização, possui como características principais estas que estão na tabela 12.1:

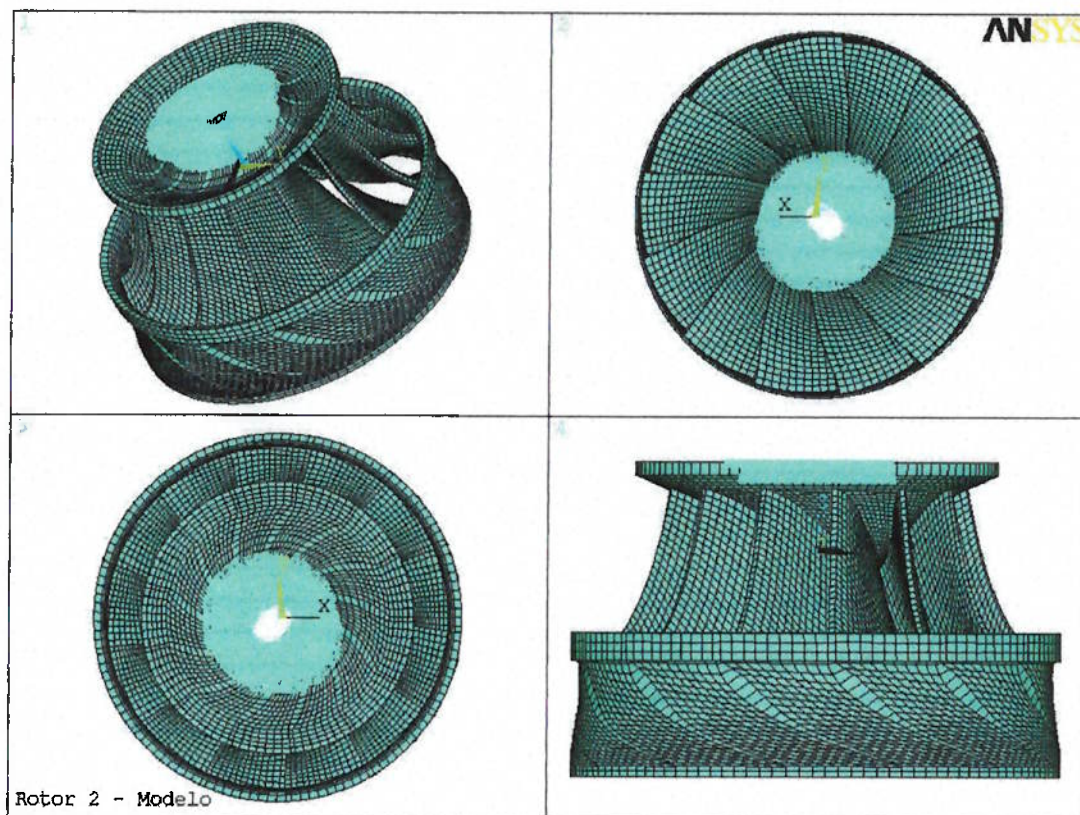
**Tabela 12.1:** Características da máquina.

Característica	Valor
Potência	181 MW
Altura de queda	50 m
Diâmetro característico	6152 mm
Rotação nominal	100 rpm
Número de pás	13
Número de palhetas	24
Massa do rotor	135 T

Assim como o primeiro rotor, trata-se de um rotor Francis considerado grande. Contudo, ao se comparar os seus dados com aqueles do primeiro (mostrados no item 8.1), percebe-se que cada um deles possui a sua própria característica física. Assim, pretende-se verificar se a generalização é realmente válida, pois são dois rotores distintos.

Quanto ao modelo para a simulação pelo MEF, ele pode ser visto na figura 12.1. Ele contém 33.436 nós, quantidade similar àquela do modelo do

rotor 1. Logo, todas as considerações sobre o método e a discretização são mais uma vez as mesmas.



**Figura 12.1:** Malha de elementos finitos do rotor 2.

## 12.2. Comparação da geometria original

Para mostrar que a idéia da generalização é válida e que esse tipo de rotor obedece sempre à mesma dinâmica, os cinco primeiros modos de vibrar do segundo rotor foram determinados pelo MEF. Eles estão nas figuras 12.2 a 12.6.



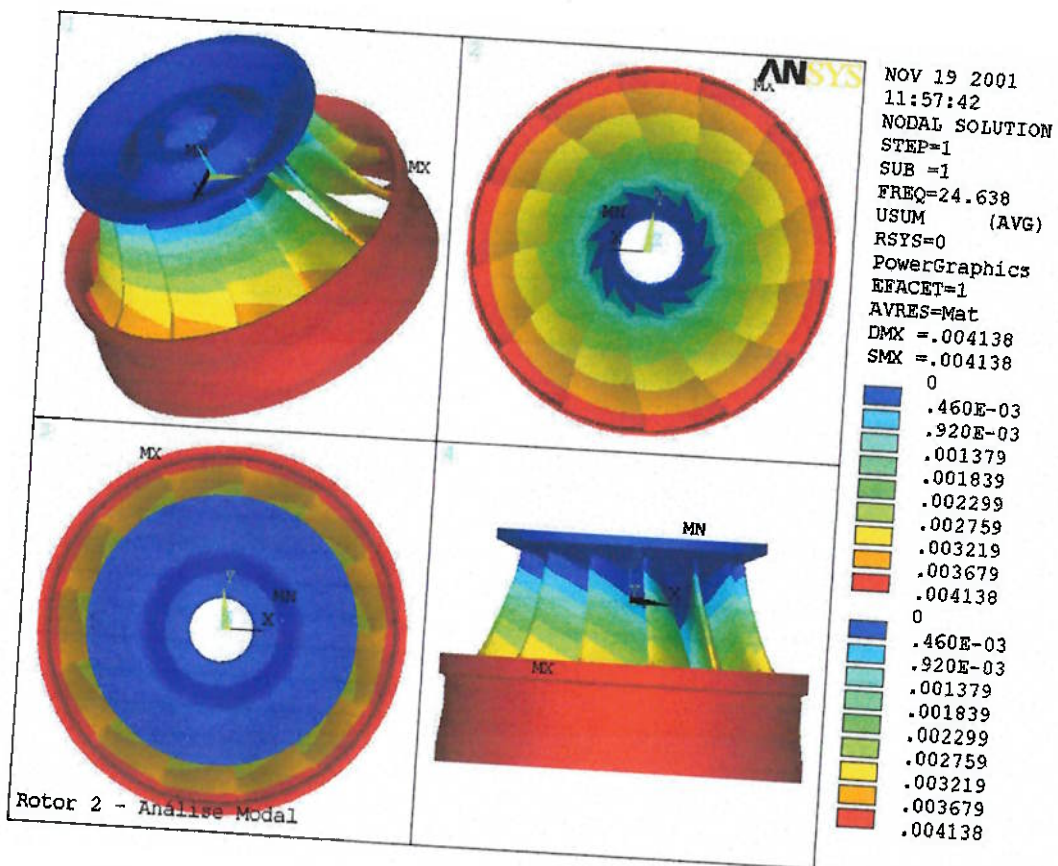
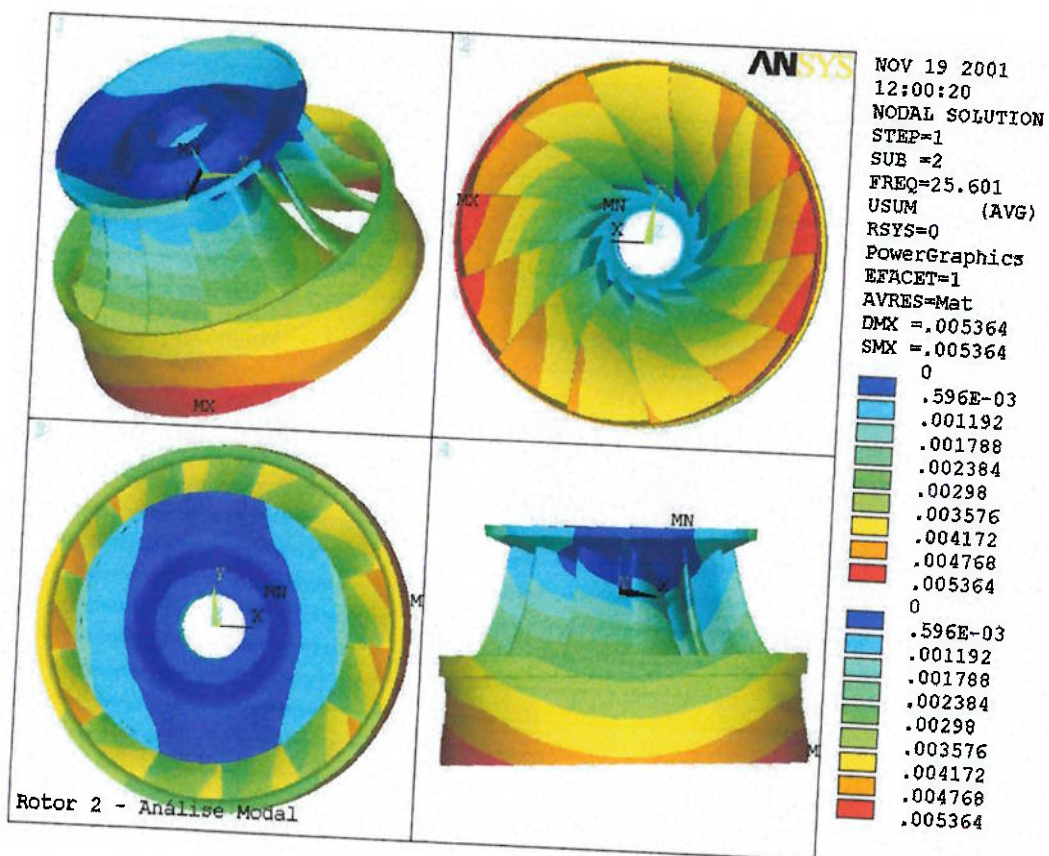


Figura 12.2: Primeiro modo de vibrar (deflexões normalizadas).



**Figura 12.3:** Segundo modo de vibrar (deflexões normalizadas).

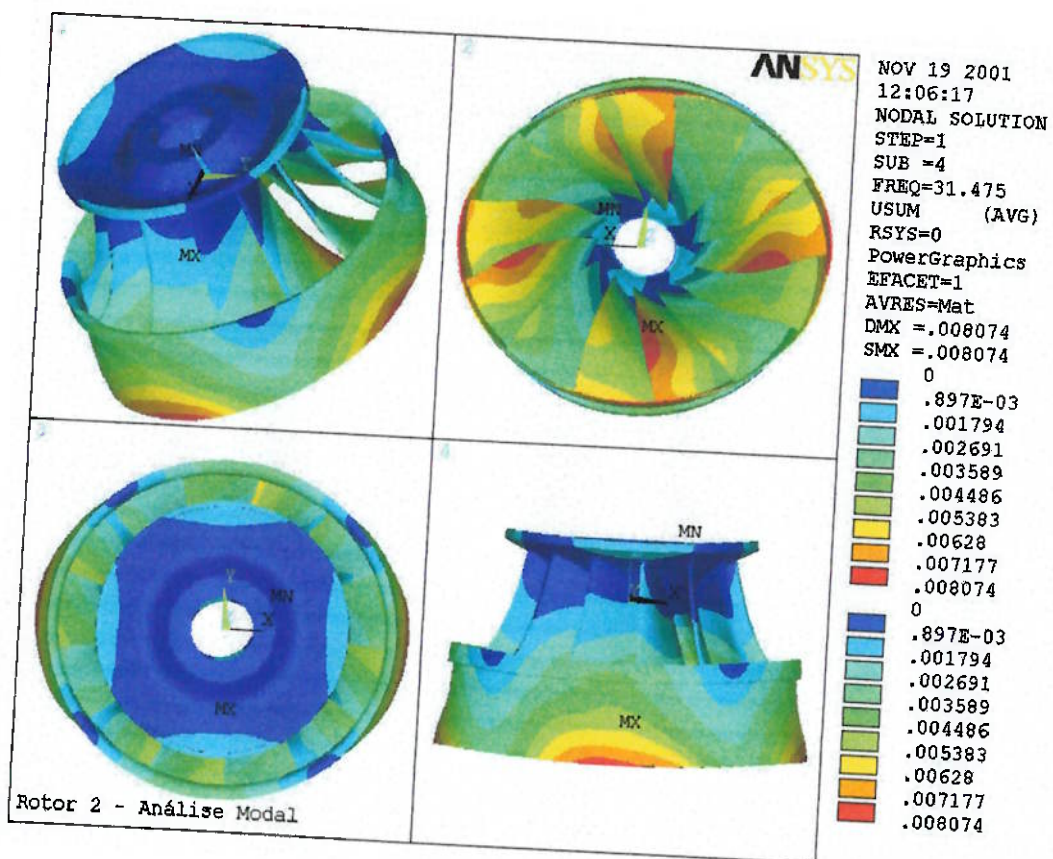


Figura 12.4: Terceiro modo de vibrar (deflexões normalizadas).

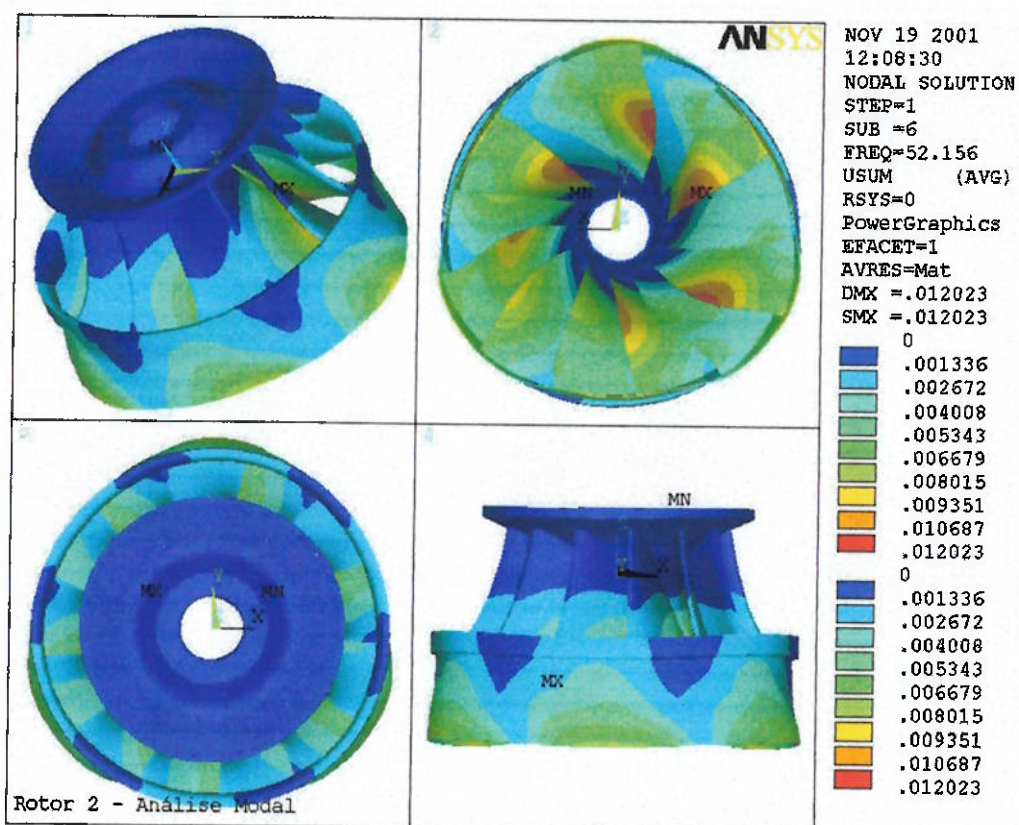
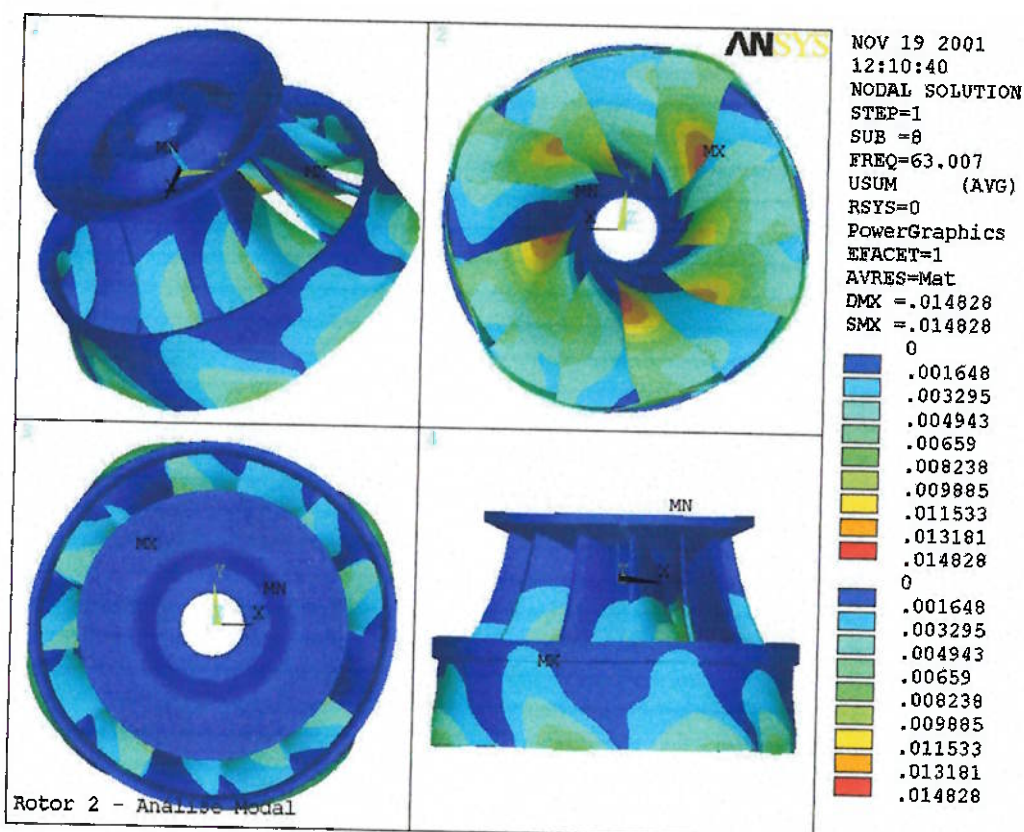


Figura 12.5: Quarto modo de vibrar (deflexões normalizadas).





**Figura 12.6:** Quinto modo de vibrar (deflexões normalizadas).

Confrontando-se os quatro primeiros modos de vibrar desse rotor àqueles do primeiro, percebe-se que eles são completamente análogos. As formas desses modos são exatamente as mesmas, quando comparadas àquelas do primeiro rotor.

A única exceção fica por conta do quinto modo de vibrar. O primeiro rotor apresenta para esse modo um movimento pendular de corpo rígido da coroa, enquanto que, aqui, o quinto modo mostra flexão da coroa em quatro direções. Contudo, não há nada de errado ou incomum com esse comportamento.

Se forem considerados modos de vibrar do primeiro rotor além do quinto, um modo com flexão da coroa em quatro direções também é encontrado. Da mesma forma, com o segundo rotor também se encontra um modo em que a coroa apresenta movimento pendular de corpo rígido. Assim, o que ocorre é que de rotor para rotor, pode haver uma eventual inversão de dois

modos de vibrar quanto à frequência. Isto depende das suas características físicas.

Portanto, vê-se claramente que a dinâmica desses rotores é a mesma e que, então, a idéia e a validade da generalização são inteiramente aceitáveis. Simulações de outros rotores Francis quer sejam eles grandes, médios ou pequenos, apesar de não mostradas aqui, também apresentam esse mesmo resultado, com apenas eventuais inversões de um ou dois modos de vibrar.

As frequências naturais associadas a cada modo também são resultados do cálculo e estão na tabela 12.2. Espera-se que a solução proposta com pás transversais as altere da mesma forma que o fez para o primeiro rotor.

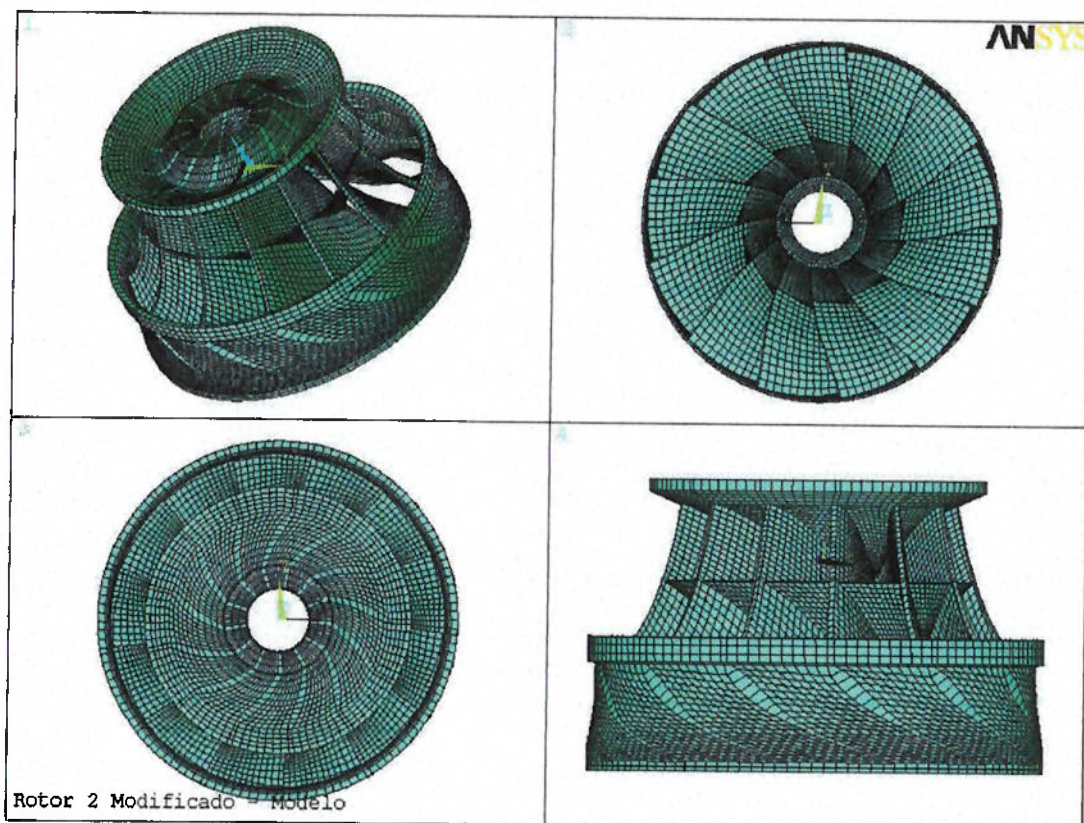
**Tabela 12.2:** Frequências naturais e amortecidas do rotor 2.

Modo	$f_n$ (Hz)	$f_d$ (Hz)
1	24,6	12,3
2	25,6	15,4
3	31,5	20,5
4	52,2	32,9
5	63,0	41,0

### 12.3. Modelo modificado e resultados

De novo, de modo a não perturbar o escoamento, as pás a serem adicionadas são bastante finas, com suas arestas de saída na mesma espessura das pás originais: aproximadamente 20 mm.

Para se testar a adição dessas pás como solução, é criado um modelo do segundo rotor modificado, cuja malha de elementos finitos pode ser vista na figura 12.7. A discretização e a confiabilidade desse modelo são semelhantes às dos demais.



**Figura 12.7:** Malha de elementos finitos do rotor 2 modificado.

Do cálculo pelo MEF, obtêm-se as frequências naturais do rotor 2 modificado. Elas podem ser vistas em conjunto com as originais, diferenças e razões na tabela 12.3.

**Tabela 12.3:** Frequências naturais originais e modificadas.

Modo	Frequência (Hz)		Razão	Diferença
	Original	Modificado		
1	24,638	28,073	1,139	3,435
2	25,601	27,879	1,089	2,278
3	31,475	37,625	1,195	6,150
4	52,156	66,343	1,272	14,187
5	63,007	82,754	1,313	19,747



## 12.4. Análise e comparação

Para facilitar a visualização dos dados e sua comparação, os resultados estão mostrados graficamente nas figuras 12.8 a 12.10.

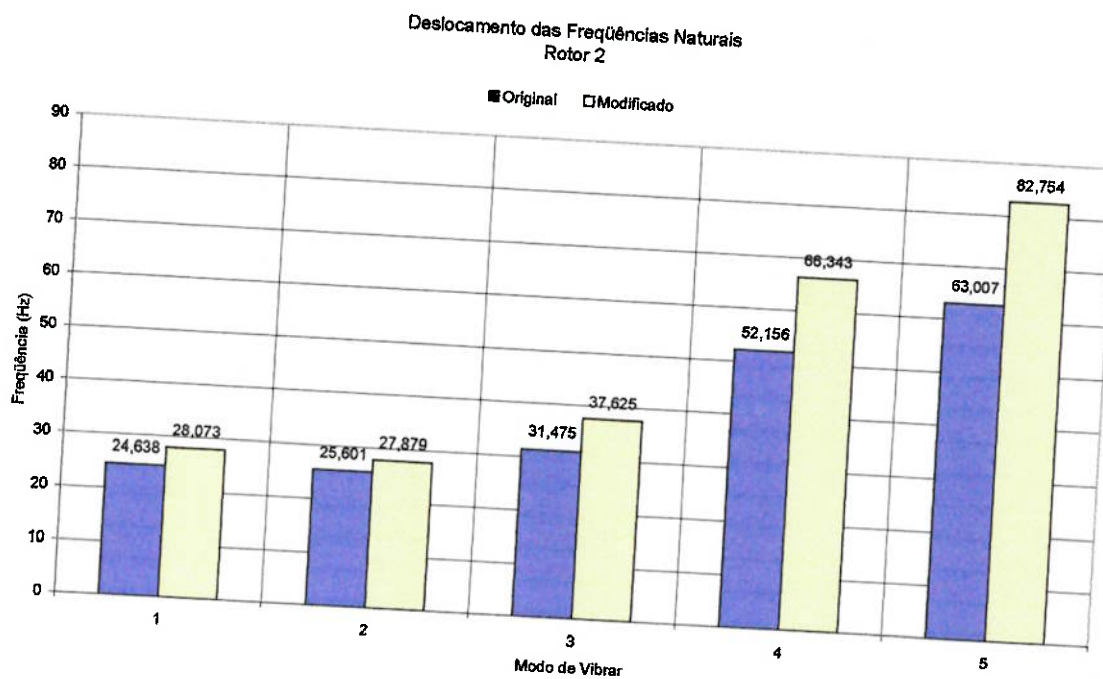
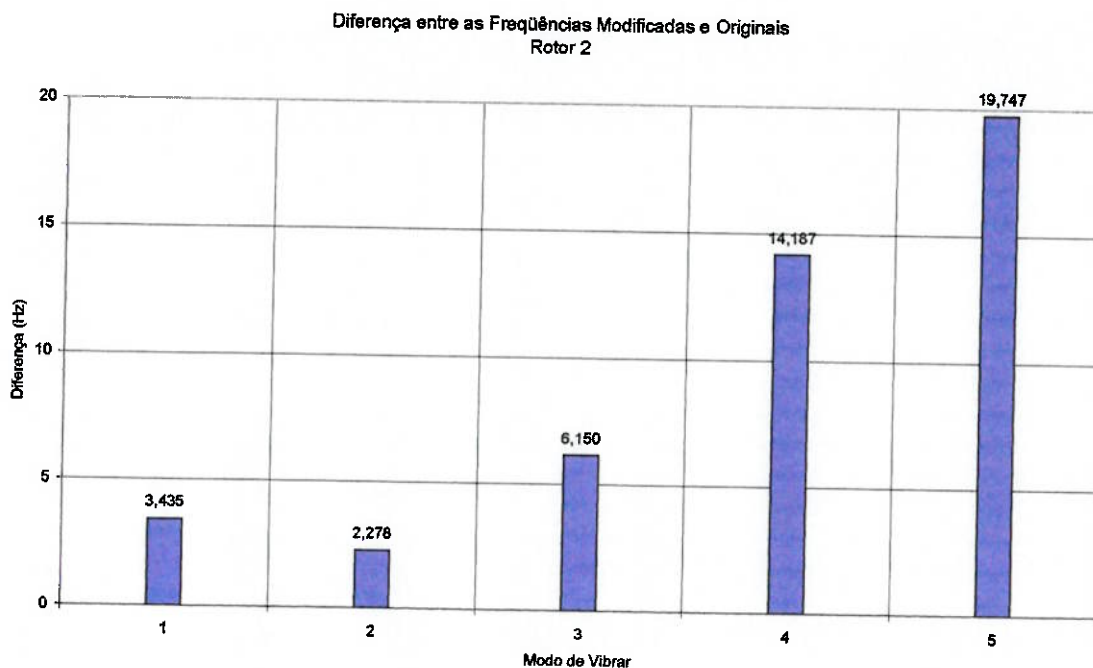
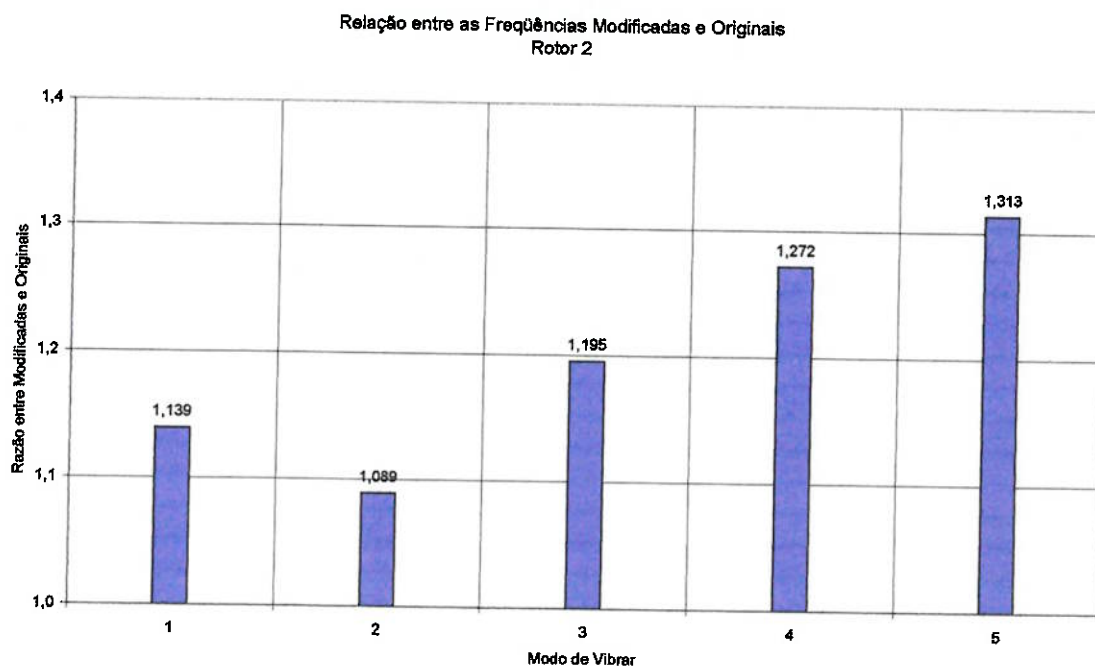


Figura 12.8: Alteração das frequências naturais.



**Figura 12.9:** Diferença entre as frequências naturais.



**Figura 12.10:** Razão entre as frequências naturais.

Da mesma forma que ocorreu com o primeiro rotor, os dois primeiros modos, nos quais a coroa apresenta principalmente movimento de corpo rígido,

a mudança de frequência foi pequena (de 24,638 para 28,073 Hz e de 25,601 para 27,879 Hz). Como anteriormente, os modos mais afetados pela modificação foram os dois últimos, que, para esse rotor, são ambos predominantemente de flexão da coroa (passaram de 52,156 para 66,343 Hz e de 63,007 para 82,754 Hz). Com o terceiro modo se vê o mesmo comportamento e ele ficou mais uma vez entre as duas tendências (foi de 31,475 para 37,625 Hz).

Observando-se a razão entre as frequências naturais modificadas e originais, o que acaba de ser dito fica ainda mais evidente. O primeiro e segundo modos tiveram deslocamentos de frequência que resultaram em razões de 1,139 e 1,089, o terceiro 1,195 e o quarto e quinto modos 1,272 e 1,313. De novo, transparece que os modos com flexão da coroa são os mais sensíveis a essa alteração.

A análise mostra que com o que foi aprendido da simulação do primeiro rotor modificado, se pôde alterar o segundo rotor para obter o resultado desejado. A resposta do sistema frente à modificação foi totalmente análoga àquela do primeiro rotor, o que, em conjunto com as considerações realizadas a respeito da dinâmica, tornam possível e suportam a generalização da solução proposta.

### 13. Conclusão

A solução proposta com a adição de pás transversais se mostrou eficiente para a resolução do problema proposto de se modificar as frequências naturais do rotor. No exemplo do rotor que falhou por operar em ressonância, foi possível tirá-lo dessa condição mudando a relação entre a frequência natural e a frequência de excitação mais próxima de  $r = 0,98$  para  $r = 1,21$ .

Vale notar que a intuição de como alterar a geometria do rotor veio do entendimento da sua dinâmica e que um modo de vibrar em específico, o terceiro, foi o objetivo principal da modificação, por se tratar do modo crítico para o exemplo. Os demais modos também se beneficiaram dessa alteração em maior ou menor grau. Percebe-se que o enfoque dado à resolução do problema tende a ser mais qualitativo. Muito mais do que um resultado quantitativo, sai de todo esse estudo um método para a alteração das frequências naturais do rotor.

Em relação ao seu caráter geral, as simulações que foram realizadas apontaram para a validade da generalização do método para outros rotores hidráulicos do tipo Francis. Isso é possível graças ao fato de que eles possuem a mesma dinâmica, apesar de variações nas suas características físicas.

Quanto às desvantagens da solução com pás transversais, elas são técnicas e econômicas. A adição dessas pás, mesmo seguindo linhas de corrente, sendo o mais finas e hidrodinâmicas possível, podem potencialmente perturbar o fluxo do escoamento, refletindo em uma perda de rendimento. Porém, isso é discutível, pois há especulações de que se o rendimento a plena carga pode ser prejudicado, em carga parcial ele tenderia a ser um pouco mais alto, resultando em um rendimento ponderado muito semelhante ao original. Por esse motivo, essa solução é viável tecnicamente.

Do ponto de vista econômico, a adição das pás transversais, encarece o rotor. Torna-se necessário fundir, usinar, soldar e controlar todas elas. Entretanto, se essa solução for usada no reparo de um rotor que já esteja em operação, certamente, esses custos adicionais não serão maiores do que os custos dos reparos constantes e de parada da máquina. Além do que, mesmo

no caso de uma máquina nova, em se tratando de um projeto grande, o custo das pás transversais pode ser tranqüilamente absorvido.

Com isso, percebe-se que outra solução proposta, a de adição de massa à coroa, também poderia ser interessante. O motivo pelo qual ela foi descartada aqui, foi a incerteza a respeito da sua capacidade de modificar a frequência natural desejada no exemplo para afastar o rotor da ressonância. Contudo, em outro problema em que o modo de vibrar associado à frequência natural crítica for tal que apresente movimento de corpo rígido da coroa, a adição de massa a ela seria plenamente satisfatória para a solução, sem as desvantagens citadas pela adição de pás transversais.

No entanto, o mais importante de toda a discussão é que o objetivo foi atingido e se conseguiu uma metodologia geral para a mudança das frequências naturais do rotor, baseado no entendimento da sua dinâmica.

## 14. Bibliografia

- [1] NIGRO, F. E. B., *Vibrações em sistemas mecânicos*, São Paulo, EPUSP, 1990.
- [2] VIERCK, R. K., *Vibration Analysis*, 2<sup>nd</sup>. ed., New York, Thomas Y. Crowell, 1979.
- [3] SETO, W. W., *Vibrações mecânicas*, Rio de Janeiro, McGraw-Hill, 1971.
- [4] CLOSE, C. M., *Modeling and analysis of dynamic systems*, Boston, John Wiley, 1978.
- [5] BICKLEY, W. G., *An introduction to the theory of vibrating systems*, 1961.
- [6] FOX, R. W., McDONALD, A. T., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 4<sup>a</sup>. ed., Rio de Janeiro, LTC, 1998.
- [7] VOITH SIEMENS HYDRO POWER GENERATION LTDA., Rua Friedrich von Voith, 825, São Paulo, SP.
- [8] POLL, H. G., *Análise Dinâmica Modal do Rotor*, São Paulo, Voith Siemens Hydro Power Generation Ltda., 2000.
- [9] MAGNOLI, M. V., *Análise Modal do Rotor*, São Paulo, Voith Siemens Hydro Power Generation Ltda., 2000.
- [10] MAGNOLI, M. V., *Análise estática preliminar do rotor*, São Paulo, Voith Siemens Hydro Power Generation Ltda., 2001.
- [11] GROSSE, G., *VTU Tools Workshop*, São Paulo, Voith Siemens Hydro Power Generation Ltda., 2001.
- [12] NEIDHARDT, T., *Runners Finite Element Analysis including water*, Heidenheim, Correspondência eletrônica, 2001.
- [13] SOTTET, J. P., *Calcul des fréquences propres de la roue*, ABB Alstom Power, 2000.
- [14] *Operations Guide for Release 5.6*, ANSYS, INC., 1999.
- [15] LAURIA, D., *Elementos de máquinas hidráulicas*, EPUSP, São Paulo, 1998.